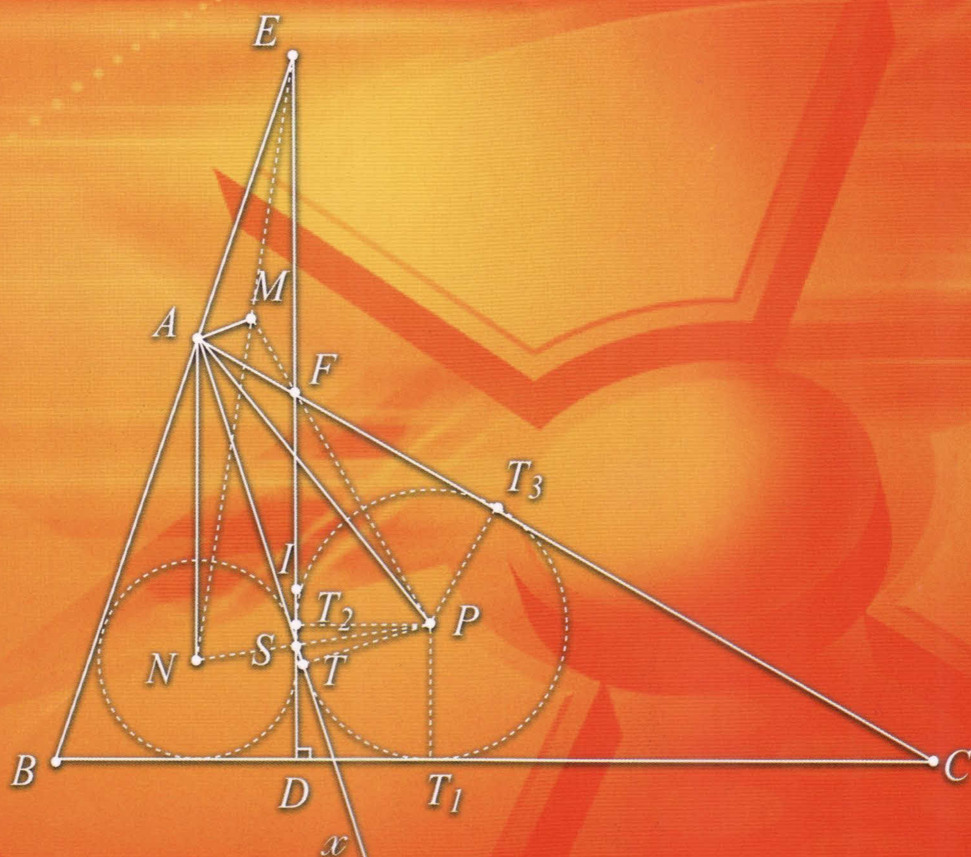
TRẦN NAM DŨNG (Chủ biên)

CÁC CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN



TP.HCM, tháng 8/2011

TRẦN NAM DŨNG (Chủ biên)

CÁC CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG

HỌC SINH GIỎI TOÁN

TP. HỒ CHÍ MINH, 08/2011

LỜI NÓI ĐẦU

Tài liệu này được biên soạn dành cho chương trình "Gặp gỡ Toán học lần thứ III" được tổ chức tại thành phố Hồ Chí Minh từ ngày 8/8 đến ngày 14/8 năm 2011 dành cho các học sinh, sinh viên và giáo viên chuyên Toán. Tuy vậy, đây không hẳn là tập hợp các bài giảng sẽ được trình bày tại các lớp học của chương trình mà là tuyển tập các bài viết hoàn chỉnh của các chuyên gia, các thầy giáo, các sinh viên và học viên cao học về các chủ đề bồi dưỡng học sinh giỏi Toán. Vì thế, có thể coi tài liệu này là một cuốn sách độc lập dành cho học sinh và giáo viên chuyên Toán. Ban biên tập đã nhận được những bài viết có chất lượng tốt được gửi từ khắp mọi miền đất nước. Chủ đề của các chuyên đề lần này rải đều tất cả các phân môn: Số học, Tổ hợp, Giải tích, Đại số, Hình học và tuổi của các tác giả cũng rải đều từ 20 đến 65. Điều này một lần nữa cho thấy sự ủng hộ của những người yêu toán dành cho chương trình "Gặp gỡ Toán học" nói riêng và phong trào chuyên Toán nói chung không bao giờ cạn và luôn ở mức cao nhất.

Chúng tôi trân trọng đưa vào tài liệu những tài liệu đã trở thành kinh điển: chương Hàm số số học trích từ cuốn sách "Số học Thuật toán" của GS Hà Huy Khoái và TS Phạm Huy Điển, bài giảng về Tổ hợp của thầy Nguyễn Khắc Minh trình bày tại khóa bồi dưỡng giáo viên Toán mùa Đông năm 1996. Xin cảm ơn GS Hà Huy Khoái và thầy Nguyễn Khắc Minh đã nhận lời tham gia giảng bài tại trường hè để truyền lửa cho các bạn học sinh ở phía Nam nói riêng và phong trào dạy và học Toán ở phía Nam nói chung.

Rất tiếc là chúng tôi không kịp đưa bài viết của GS Ngô Bảo Châu vào cuốn kỷ yếu lần này. Tuy nhiên chúng tôi sẽ gửi tặng bạn đọc bản viết tay của GS dành cho trường hè. Sự ủng hộ của GS Ngô Bảo Châu cũng như sự khích lệ của GS Ngô Việt Trung, GS Nguyễn Văn Mậu, GS Lê Tuấn Hoa là một nguồn cổ vũ lớn lao cho các thành viên BTC.

Chúng tôi trân trọng cảm ơn trường Đại học Khoa học Tự nhiên, đặc biệt là PGS TS Dương Anh Đức và PGS TS Đặng Đức Trọng đã ủng hộ và hỗ trợ mọi mặt cho những người thực hiện chương trình. Cảm ơn nhà in Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh đã hoàn thành tốt công việc của mình với tinh thần trách nhiệm cao nhất. Ban biên tập chân thành cảm ơn các bạn Lê Phúc Lữ (sinh viên năm 2 trường Đại học FPT) và bạn Lê Việt Hải (học sinh lớp 12 trường Phổ thông Năng khiếu) đã có nhiều đóng góp cho việc biên tập.

Cuối cùng chúng tôi muốn cảm ơn Công ty cổ phần Giáo dục Titan đã tạo những điều kiện tốt nhất và hỗ trợ tối đa để Ban biên tập có thể hoàn thành cuốn tài liệu này.

BAN BIÊN TẬP

MỤC LỤC

VỀ CÁC HÀM SỐ HỌC

Hà Huy Khoái – Phạm Huy Điển[1,2]

Khi nghiên cứu các số nguyên, ta thường làm việc với các đại lượng như: số các ước của một số nguyên tố cho trước, tổng các ước của nó, tổng các lũy thừa bậc k của các ước, ... Ngoài những ví dụ đó còn có nhiều hàm số học quan trọng khác. Trong bài viết này, ta sẽ đi qua một vài hàm quan trọng, đặc biệt là hàm Euler, một trong những hàm số học quan trọng nhất.

1 Định nghĩa

Định nghĩa 1. *Hàm số học tức là hàm xác định trên tập hợp các số nguyên dương.*

Định nghĩa 2. *Một hàm số học f được gọi là nhân tính nếu với mọi m, n nguyên tố cùng nhau, ta có đẳng thức*

$$f(mn) = f(m)f(n).$$

Trong trường hợp đẳng thức trên đúng với mọi m, n (không nhất thiết nguyên tố cùng nhau), hàm f được gọi là nhân tính mạnh.

Những ví dụ đơn giản nhất về hàm nhân tính (mạnh) là $f(n) = n$ và $f(n) = 1$.

Dễ chứng minh tính chất sau đây: nếu f là một hàm nhân tính, n là số nguyên dương có khai triển thành thừa số nguyên tố dạng $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$, thì $f(n)$ được tính theo công thức

$$f(n) = f(p_1^{a_1})f(p_2^{a_2})\cdots f(p_k^{a_k}).$$

2 Phi-hàm Euler

Trong các hàm số học, hàm Euler mà ta định nghĩa sau đây có vai trò rất quan trọng.

Định nghĩa 3. *Phi-hàm Euler $\phi(n)$ là hàm số học có giá trị tại n bằng số các số không vượt quá n và nguyên tố cùng nhau với n.*

Ví dụ. Từ định nghĩa ta có $\phi(1) = 1$, $\phi(2) = 1$, $\phi(3) = 2$, $\phi(4) = 2$, $\phi(5) = 4$, $\phi(6) = 2$, $\phi(7) = 6$, $\phi(8) = 4$, $\phi(9) = 6$, $\phi(10) = 4$.

Từ định nghĩa trên đây, ta có ngay hệ quả trực tiếp: *Số p là nguyên tố khi và chỉ khi $\phi(p) = p-1$.*

Nếu định lý Fermat bé cho ta công cụ nghiên cứu đồng dư modulo một số nguyên tố, thì Phi-hàm Euler được dùng để xét đồng dư modulo một tập hợp số. Trước khi đi vào vấn đề đó, ta cần một số định nghĩa sau.

Định nghĩa 4. *Hệ thặng dư thu gọn modulo n là tập hợp $\phi(n)$ số nguyên sao cho mỗi phần tử của tập nguyên tố cùng nhau với n, và không có 2 phần tử nào đồng dư với nhau modulo n.*

[1]Viện Toán học.

[2]Bài viết được trích trong cuốn sách "Số học Thuật toán" của các tác giả xuất bản năm 2003 tại Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

Nói cách khác từ hệ thặng dư đầy đủ modulo n, để lập hệ thặng dư thu gọn, ta chỉ giữ lại những giá trị nào nguyên tố cùng nhau với n.

Ví dụ. Các số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập thành hệ thặng dư thu gọn modulo 7. Đối với modulo 8, ta có thể lấy 1, 3, 5, 7.

Định lý 1. *Nếu $r_1, r_2, \ldots, r_{\phi(n)}$ là một hệ thặng dư thu gọn modulo n, và a là số nguyên dương, $(a, n) = 1$, thì tập hợp $ar_1, ar_2, \ldots, ar_{\phi(n)}$ cũng là hệ thặng dư thu gọn modulo n.*

Chứng minh. Chúng tôi dành chứng minh định lý này cho độc giả. □

Định lý trên đây được dùng để chứng minh mở rộng của định lý Fermat bé.

Định lý 2 (Euler). *Nếu m là số nguyên dương và a là số nguyên tố cùng nhau với m, thì*

$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Chứng minh. Ta lập luận hoàn toàn tương tự như trong định lý Fermat bé. Giả sử $r_1, r_2, \ldots, r_{\phi(m)}$ là thặng dư thu gọn mod m, lập nên từ các số nguyên dương không vượt quá m và nguyên tố cùng nhau với m. Theo định lý 1, $ar_1, ar_2, \ldots, ar_{\phi(m)}$ cũng là một hệ thặng dư thu gọn. Khi đó thặng dư dương bé nhất của hệ này sẽ là tập hợp $r_1, r_2, \ldots, r_{\phi(m)}$ sắp xếp theo một thứ tự nào đó. Ta có

$$(ar_1)(ar_2)\cdots(ar_{\phi(m)}) \equiv r_1r_2\cdots r_{\phi(m)} \pmod{m}.$$

Như vậy,

$$a^{\phi(m)}r_1r_2\cdots r_{\phi(m)} \equiv r_1r_2\cdots r_{\phi(m)} \pmod{m}.$$

Từ đó suy ra định lý. □

Định lý Euler có thể dùng để tìm nghịch đảo modulo m. Chẳng hạn nếu a và m là các số nguyên tố cùng nhau, ta có $a \cdot a^{\phi(m)-1} \equiv 1 \pmod{m}$, tức là $a^{\phi(m)-1}$ chính là nghịch đảo của a modulo m. Từ đó cũng suy ra nghiệm của phương trình đồng dư tuyến tính $ax \equiv b \pmod{m}$, với $(a, m) = 1$ là

$$x \equiv a^{\phi(m)-1}b \pmod{m}.$$

Định lý 3. *Phi-hàm Euler là hàm nhân tính.*

Chứng minh. Giả sử m, n là hai số dương nguyên tố cùng nhau. Ta cần chứng tỏ rằng

$$\phi(mn) = \phi(m)\phi(n).$$

Ta sắp xếp tất cả các số nguyên dương không vượt quá mn thành bảng sau

$$\begin{array}{ccccc}
1 & m+1 & 2m+1 & \ldots & (n-1)m+1 \\
2 & m+2 & 2m+2 & \ldots & (n-1)m+2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
r & m+r & 2m+r & \ldots & (n-1)m+r \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
m & 2m & 3m & \ldots & mn
\end{array}$$

Giả sử r là số nguyên không vượt quá m, và $(r, m) = d > 1$. Khi đó trong hàng thứ r không có số nguyên nào nguyên tố cùng nhau với mn. Vì thế để tính $\phi(mn)$, ta chỉ cần quan tâm các số trong hàng thứ r với $(r, m) = 1$. Các số trong hàng này đều nguyên tố cùng nhau với m. Mặt khác dễ thấy rằng các số trong hàng này lập thành một hệ thặng dư đầy đủ modulo n. Do đó có đúng $\phi(n)$ số trong hàng nguyên tố cùng nhau với n, tức là trong hàng có $\phi(n)$ số nguyên tố cùng nhau với mn. Cả thảy có $\phi(n)$ hàng như vậy, định lý được chứng minh. □

Nhờ tính chất này ta có ngay công thức Phi-hàm Euler.

Định lý 4. *Giả sử $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ là phân tích của n thành thừa số nguyên tố. Khi đó ta có*

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Chứng minh. Do Phi-hàm Euler là hàm nhân tính nên ta chỉ cần chứng minh rằng, với mọi số nguyên tố p, thì

$$\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}.$$

Thật vậy, các số nguyên dương không vượt quá p^k và không nguyên tố cùng nhau với p phải có dạng sp với s nguyên dương nào đó. Có đúng p^{k-1} số như vậy. Do đó, số các số không vượt quá p^k và nguyên tố cùng nhau với p^k đúng bằng $p^k - p^{k-1}$. □

Tính chất quan trọng sau đây của Phi-hàm thường được sử dụng về sau.

Định lý 5. *Giả sử n là một số nguyên dương. Khi đó*

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n,$$

trong đó tổng được lấy theo mọi ước của n.

Chứng minh. Ta phân các số nguyên từ 1 đến n thành từng nhóm C_d sao cho $m \in C_d$ khi và chỉ khi $(m, n) = d$, tức là khi và chỉ khi $\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) = 1$. Như vậy, số phần tử của C_d đúng bằng số các số nguyên không vượt quá $\frac{n}{d}$ và nguyên tố cùng nhau với $\frac{n}{d}$, tức là bằng $\phi\left(\frac{n}{d}\right)$. Ta có

$$n = \sum_{d|n} \phi\left(\frac{n}{d}\right).$$

Khi d chạy qua mọi ước của n thì $\frac{n}{d}$ cũng chạy qua mọi ước của n, định lý được chứng minh. □

Nhận xét. Các tính chất của Phi-hàm Euler được sử dụng để tính đồng dư của những lũy thừa rất lớn. Chẳng hạn, ta cần tính $a^n \bmod k$, trong đó n là một số nguyên lớn. Giả sử ta có

$$k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}.$$

Khi đó $a^{\phi(p_i^{\alpha_i})} \equiv 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$. Từ đây suy ra nếu N là bội chung nhỏ nhất của các số $\phi(p_i^{\alpha_i})$ thì $a^N \equiv a \pmod{k}$. Do đó, viết $n = Nq + r$ với $r < N$, ta được

$$a^n \equiv a^r \pmod{k}.$$

Ví dụ. Để tính $2^{1000000} \bmod 77$, ta thực hiện như sau: Ta có

$$77 = 11 \cdot 7, \quad \phi(7) = 6, \quad \phi(11) = 10.$$

Bội chung nhỏ nhất của 6 và 10 là 30, do đó

$$2^{30} \equiv 1 \pmod{77}.$$

Mặt khác, dễ dàng kiểm tra được $1000000 = 30 \cdot 33333 + 10$. Vì vậy,

$$2^{1000000} \equiv 2^{10} \equiv 23 \pmod{77}.$$

3 Số hoàn hảo và số nguyên tố Mersenne

Mục này dành để mô tả một dạng đặc biệt của số nguyên tố, có vai trò quan trọng trong lý thuyết và ứng dụng. Ta bắt đầu bằng một số hàm số học quan trọng.

Định nghĩa 5. *Hàm $\tau(n)$, số các ước, có giá trị tại n bằng số các ước dương của n. Hàm $\sigma(n)$, tổng các ước, có giá trị tại n bằng tổng các ước dương của n. Nói cách khác, ta có*

$$\tau(n) = \sum_{d\,|\,n} 1, \quad \sigma(n) = \sum_{d\,|\,n} d.$$

Ví dụ. Nếu p là một số nguyên tố thì $\tau(p) = 2$, $\sigma(p) = p + 1$.

Định lý 6. *$\tau(n)$ và $\sigma(n)$ là các hàm nhân tính.*

Dễ thấy rằng, định lý trên suy ra từ bổ đề sau.

Bổ đề 1. *Nếu f là hàm nhân tính, thì*

$$F(n) = \sum_{d\,|\,n} f(d)$$

cũng là hàm nhân tính.

Chứng minh. Giả sử m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Ta có

$$F(mn) = \sum_{d\,|\,mn} f(d).$$

Vì $(m, n) = 1$, mỗi ước d của mn có thể viết duy nhất dưới dạng $d = d_1d_2$ trong đó d_1, d_2 tương ứng là ước của m, n, và d_1, d_2 nguyên tố cùng nhau, do vậy ta có

$$F(mn) = \sum_{d_1\,|\,m,\, d_2\,|\,n} f(d_1d_2).$$

Vì f là hàm nhân tính và $(d_1, d_2) = 1$ nên

$$F(mn) = \sum_{d_1\,|\,m,\, d_2\,|\,n} f(d_1)f(d_2) = \left[\sum_{d_1\,|\,m} f(d_1)\right]\left[\sum_{d_2\,|\,n} f(d_2)\right] = F(m)F(n).$$

Bổ đề được chứng minh. □

Sử dụng định lý , ta có ngay công thức sau đây cho các hàm $\tau(n)$ và $\sigma(n)$.

Định lý 7. *Giả sử n có phân tích ra thừa số nguyên tố là $n = p_1^{a_2}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$. Khi đó ta có*

$$\sigma(n) = \prod_{j=1}^{k} \frac{p_j^{a_j+1} - 1}{p_j - 1}, \quad \tau(n) = (a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_k+1) = \prod_{j=1}^{k}(a_j+1).$$

Chứng minh. Chúng tôi dành chứng minh này cho độc giả. □

Do các quan niệm thần bí, người cổ Hy Lạp quan tâm đến các số nguyên bằng tổng tất cả các ước dương thực sự của nó. Họ gọi các số đó là các *số hoàn hảo*.

Định nghĩa 6. *Số nguyên dương n được gọi là số hoàn hảo nếu*

$$\sigma(n) = 2n.$$

Ví dụ. Các số 6, 28 là các số hoàn hảo vì

$$\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12, \quad \sigma(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56.$$

Định lý sau đây được biết từ thời Hy Lạp.

Định lý 8. *Số nguyên dương chẵn n là số hoàn hảo khi và chỉ khi $n = 2^{m-1}(2^m - 1)$, trong đó m là một số nguyên sao cho $m \geqslant 2$ và $2^m - 1$ là số nguyên tố.*

Chứng minh. Trước tiên, giả sử rằng, n có dạng như trên. Vì σ là hàm nhân tính, ta có

$$\sigma(n) = \sigma(2^{m-1})\sigma(2^m - 1).$$

Từ công thức của hàm σ và giả thiết $2^m - 1$ là số nguyên tố, dễ thấy rằng $\sigma(2^{m-1}) = 2^m - 1$, $\sigma(2^m - 1) = 2^m$, và do đó $\sigma(n) = 2n$. Điều này chứng tỏ n là số hoàn hảo.

Ngược lại, giả sử n là số hoàn hảo chẵn. Viết n dưới dạng $n = 2^s t$, trong đó s, t là các số nguyên dương, t lẻ, ta được

$$\sigma(n) = \sigma(2^s t) = \sigma(2^s)\sigma(t) = (2^{s+1} - 1)\sigma(t).$$

Vì n là số hoàn hảo nên $\sigma(n) = 2n = 2^{s+1}t$. Như vậy, $2^{s+1} \mid \sigma(t)$. Giả sử $\sigma(t) = 2^{s+1}q$, thì

$$(2^{s+1} - 1)2^{s+1}q = 2^{s+1}t,$$

tức là $q \mid t$ và $q \neq t$. Mặt khác ta có

$$t + q = (2^{s+1} - 1)q + q = 2^{s+1}q = \sigma(t).$$

Ta sẽ chứng tỏ rằng $q = 1$. Thật vậy, nếu ngược lại, t có ít nhất 3 ước khác nhau là 1, t, q, do đó $\sigma(t) \geqslant t + q + 1$, mâu thuẫn với đẳng thức vừa chứng minh. Vậy $\sigma(t) = t + 1$, có nghĩa t là số nguyên tố. Định lý được chứng minh. □

Như vậy để tìm các số hoàn hảo, ta cần tìm các số nguyên tố có dạng $2^m - 1$.

Định nghĩa 7. *Giả sử m là một số nguyên dương, khi đó $M_m = 2^m - 1$ được gọi là số Mersenne thứ m. Nếu p là số nguyên tố, và M_p cũng nguyên tố, thì M_p được gọi là số nguyên tố Mersenne.*

Ví dụ. M_2, M_3, M_5, M_7 là các số nguyên tố Mersenne, trong khi M_{11} là hợp số.

Có nhiều định lý khác nhau dùng để xác định số nguyên tố Mersenne. Chẳng hạn nhờ định lý sau đây, ta có thể kiểm tra nhanh chóng dựa vào dạng của các ước nguyên tố của số Mersenne.

Định lý 9. *Nếu p là một số nguyên tố lẻ, thì mọi ước nguyên tố của số Mersenne M_p đều có dạng $2kp + 1$, trong đó k là số nguyên dương.*

Chứng minh. Giả sử q là một ước nguyên tố của M_q. Theo định lý Fermat bé, $q \mid (2^{q-1} - 1)$. Lại có $(2^p - 1, 2^{q-1} - 1) = 2^{(p,q-1)} - 1$. Ước chung này lớn hơn 1, vì nó là một bội của q. Do đó, $(p, q-1) = p$, vì p là một số nguyên tố. Ta có $q = mp + 1$, và vì q lẻ nên $m = 2k$, định lý được chứng minh. □

Sau đây là vài ví dụ cho thấy ứng dụng của định lý trên.

Ví dụ 1. Để xét xem $M_{13} = 2^{13} - 1 = 8191$ có phải là số nguyên tố hay không, ta cần xem các phép chia cho những số nguyên tố không vượt quá $\sqrt{8191} \approx 90$. Mặt khác, theo định lý trên, mọi ước nguyên tố đều phải có dạng $26k + 1$. Như vậy chỉ cần thử với hai số 53 và 79. Từ đây, do 53 và 79 không chia hết M_{13} nên ta có M_{13} là số nguyên tố.

Ví dụ 2. Xét $M_{23} = 8388607$. Ta cần xét các phép chia của nó cho các số nguyên tố dạng $46k + 1$. Số đầu tiên 47 là ước của nó, vì vậy M_{23} là hợp số.

Có nhiều thuật toán đặc biệt để kiểm tra nguyên tố các số Mersenne. Nhờ đó, người ta phát hiện được những số nguyên tố rất lớn. Mỗi lần có một số nguyên tố Mersenne, ta lại được một số hoàn hảo. Cho đến nay, người ta đã biết được rằng, với $p \leqslant 132049$, chỉ có 30 số nguyên tố Mersenne, và tính được chúng. Số nguyên tố Mersenne tìm được gần đây nhất là số $M_{6972593}$, gồm 2098960 chữ số.[3]

Giả thiết sau đây vẫn còn chưa được chứng minh.

Giả thiết 1. *Tồn tại vô hạn số nguyên tố Mersenne.*

Người ta đã biết được rằng, trong khoảng từ 1 đến 10^{200} không có số hoàn hảo lẻ. Tuy nhiên câu hỏi sau đây vẫn chưa được trả lời.

Câu hỏi 1. *Tồn tại hay không các số hoàn hảo lẻ?*

4 Căn nguyên thủy

Khi xét các số phức là căn bậc n của đơn vị, ta thường chú ý những số nào không phải là căn của đơn vị với bậc thấp hơn. Những số đó gọi là căn nguyên thủy của đơn vị. Đối với các số nguyên, ta cũng có khái niệm hoàn toàn tương tự về "căn" và "căn nguyên thủy" của đơn vị.

Định nghĩa 8. *Giả sử a và m là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Khi đó số nguyên nhỏ nhất x thỏa mãn đồng dư thức*

$$a^x \equiv 1 \pmod{m}$$

được gọi là bậc của a modulo m. Ta viết $x = \operatorname{ord}_m a$.

Ta chú ý rằng, số x như vậy tồn tại vì ta luôn có, theo định lý Euler,

$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Định lý 10. *Giả sử a, n là các số nguyên tố cùng nhau, $n > 0$. Khi đó số nguyên x là nghiệm của phương trình $a^x \equiv 1 \pmod{m}$ khi và chỉ khi x là một bội của bậc của a modulo m.*

Chứng minh. Giả sử x thỏa mãn phương trình đồng dư trên. Ta viết $x = q \operatorname{ord}_m a + r$, trong đó $0 \leqslant r < x$. Từ đó ta có $a^r \equiv 1 \pmod{m}$. Vì $\operatorname{ord}_m a$ là số dương nhỏ nhất có tính chất đó nên $r = 0$, suy ra x là một bội của bậc của a modulo m. Điều ngược lại là rõ ràng. □

Hệ quả 1. *Nếu a và n là các số nguyên tố cùng nhau, $n > 0$, thì $\operatorname{ord}_n a$ chia hết $\phi(n)$.*

Hệ quả 2. *Nếu a, n là các số nguyên tố cùng nhau, $n > 0$, thì $a^i \equiv a^j \pmod{n}$ khi và chỉ khi*

$$i \equiv j \pmod{\operatorname{ord}_n a}.$$

[3]Tính đến nay, số nguyên tố Mersenne lớn nhất là $M_{43112609}$ được tìm thấy bởi Edson Smith vào năm 2008.

Chứng minh các hệ quả trên được dành cho độc giả.

Do hệ quả 1, nếu r và n là nguyên tố cùng nhau thì bậc của r không vược quá $\phi(n)$. Các số có bậc đúng bằng $\phi(n)$ giữ vai trò quan trọng trong nhiều vấn đề khác nhau của Số học. Ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa 9. *Nếu r và n là các số nguyên tố cùng nhau, $n > 0$, và nếu $\operatorname{ord}_n r = \phi(n)$ thì r được gọi là căn nguyên thủy modulo n.*

Chú ý rằng không phải mọi số đều có căn nguyên thủy. Chẳng hạn, xét $n = 8$. Các số nhỏ hơn 8 và nguyên tố cùng nhau với 8 là 1, 3, 5, 7, đồng thời ta có $\operatorname{ord}_8 1 = 1$, bậc của các số còn lại bằng 2, trong khi đó $\phi(8) = 4$. Vấn đề những số nguyên nào thì có căn nguyên thủy sẽ được xét về sau.

Định lý 11. *Nếu r, n nguyên tố cùng nhau, $n > 0$, và nếu r là căn nguyên thủy modulo n, thì các số $r^1, r^2, \ldots, r^{\phi(n)}$ lập thành hệ thặng dư thu gọn modulo n.*

Chứng minh. Vì $(r, n) = 1$ nên các số trên nguyên tố cùng nhau với n. Ta chỉ cần chứng tỏ rằng, không có hai số nào đồng dư với nhau modulo n. Giả sử $r^i \equiv r^j \pmod{n}$. Theo hệ quả 2, ta có $i \equiv j \pmod{\phi(n)}$. Từ đó suy ra $i = j$, vì i, j không vượt quá $\phi(n)$. Định lý được chứng minh. □

Định lý 12. *Nếu $\operatorname{ord}_m a = t$ và u là số nguyên dương, thì*

$$\operatorname{ord}_m(a^u) = \frac{t}{(t, u)}.$$

Chứng minh. Đặt $v = (t, u)$, $t = t_1 v$, $u = u_1 v$ và $s = \operatorname{ord}_m(a^u)$. Ta có

$$(a^u)^{t_1} = (a^{u_1 v})^{\frac{t}{v}} = (a^t)^{u_1} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Do đó, $s \mid t_1$. Mặt khác, $(a^u)^s = a^{us} \equiv 1 \pmod{m}$ nên $t \mid su$. Như vậy, $t_1 v \mid u_1 v s$, do đó $t_1 \mid u_1 s$. Vì $(u_1, v_1) = 1$, ta có $t_1 \mid s$. Cuối cùng, do $s \mid t_1$ và $t_1 \mid s$ nên $s = t_1 = \frac{t}{v} = \frac{t}{(t,u)}$, và như thế định lý được chứng minh xong. □

Hệ quả 3. *Giả sử r là căn nguyên thủy modulo m, trong đó m là số nguyên lớn hơn 1. Khi đó r^u là căn nguyên thủy modulo m nếu và chỉ nếu $\big(u, \phi(m)\big) = 1$.*

Chứng minh. Do $\operatorname{ord}_m r^u = \frac{\operatorname{ord}_m r}{(u, \operatorname{ord}_m r)} = \frac{\phi(m)}{\big(u, \phi(m)\big)}$ nên hệ quả được chứng minh. □

5 Sự tồn tại của căn nguyên thủy

Trong mục này, ta sẽ xác định những số nguyên có căn nguyên thủy. Trước tiên ta sẽ chứng minh rằng với mọi số nguyên tố đều có căn nguyên thủy. Để làm việc đó, ta cần một vài kiến thức về đồng dư đa thức.

Định nghĩa 10. *Giả sử $f(x)$ là đa thức với hệ số nguyên. Số c được gọi là nghiệm của đa thức $f(x)$ modulo m nếu $f(c) \equiv 0 \pmod{m}$.*

Dễ thấy rằng, nếu c là một nghiệm của đa thức $f(x)$ modulo m thì mọi số đồng dư với c modulo m cũng là nghiệm.

Đối với số nghiệm của một đa thức modulo một số nguyên tố, ta cũng có tính chất tương tự như số nghiệm của một đa thức.

Định lý 13 (Lagrange). *Giả sử $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ là đa thức với hệ số nguyên, $n > 0$, đồng thời $a_n \not\equiv 0 \pmod p$. Khi đó $f(x)$ có nhiều nhất n nghiệm modulo p không đồng dư từng cặp.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp. Khi $n = 1$, định lý là rõ ràng. Giả sử định lý đã chứng minh với đa thức bậc $n-1$ có hệ số của lũy thừa cao nhất không chia hết cho p, và giả sử rằng đa thức $f(x)$ bậc n có $n+1$ nghiệm modulo p không đồng dư từng cặp $c_0, c_1, \ldots, c_n$. Ta có đẳng thức

$$f(x) - f(c_0) = (x - c_0)g(x),$$

trong đó $g(x)$ là đa thức bậc $n-1$ với hệ số cao nhất là a_n.

Vì với mọi k, $0 \leqslant k \leqslant n$, $c_k - c_0 \not\equiv 0 \pmod p$, trong khi đó

$$f(c_k) - f(c_0) = (c_k - c_0)g(c_k) \equiv 0 \pmod p$$

cho nên c_k là nghiệm của $g(x)$ modulo p. Điều này trái với giả thiết quy nạp. Và như thế, định lý được chứng minh. □

Định lý 14. *Giả sử p là số nguyên tố và d là một ước của $p-1$. Khi đó đa thức $x^d - 1$ có đúng d nghiệm modulo p không đồng dư từng cặp.*

Chứng minh. Giả sử $p-1 = de$. Ta có $x^{p-1} = (x^d - 1)g(x)$. Theo định lý Fermat bé, $x^{p-1} - 1$ có $p-1$ nghiệm modulo p không đồng dư từng cặp. Mặt khác, mỗi một nghiệm đó phải là nghiệm của $x^d - 1$ hoặc là của $g(x)$. Theo định lý Lagrange, $g(x)$ có nhiều nhất $p-d-1$ nghiệm không đồng dư từng cặp, vì thế số nghiệm của $x^d - 1$ không thể ít hơn là

$$(p-1) - (p-d-1) = d.$$

Lại theo định lý Lagrange, $x^d - 1$ có không quá d nghiệm, vậy nó có đúng d nghiệm modulo p không đồng dư từng cặp. Định lý được chứng minh. □

Định lý 15. *Giả sử p là số nguyên tố, d là ước dương của $p-1$. Khi đó, số các số nguyên không đồng dư bậc d modulo p là $\phi(d)$.*

Chứng minh. Giả sử $F(d)$ là số các số nguyên dương bậc d modulo p và bé hơn p. Ta cần chứng tỏ rằng $F(d) = \phi(d)$. Vì $\phi(d) = p-1$ nên $d \mid p-1$, từ đó ta có

$$p - 1 = \sum_{d \mid p-1} F(d).$$

Mặt khác, theo công thức của Phi-hàm, ta có

$$p - 1 = \sum_{d \mid p-1} \phi(d),$$

Như vậy định lý sẽ được chứng minh nếu ta chứng tỏ được rằng $F(d) \leqslant \phi(d)$ nếu $d \mid p-1$.

Khi $F(d) = 0$, điều nói trên là tầm thường. Giả sử $F(d) \neq 0$, tức là tồn tại số nguyên a hoặc d modulo p. Khi đó, các số nguyên $a, a^2, \ldots, a^d$ không đồng dư modulo p. Rõ ràng, mỗi lũy thừa của a là một nghiệm của $x^d - 1 \equiv 0 \pmod p$, mà số nghiệm không đồng dư đúng bằng d, nên mỗi nghiệm modulo p đồng dư với một trong các lũy thừa của a.

Do đó, vì phần tử tùy ý bậc d là một nghiệm của phương trình $x^d - 1 \equiv 0 \pmod p$ nên phải đồng dư với một trong các lũy thừa của a. Mặt khác, theo định lý 11, ta có lũy thừa k của a có bậc d khi và chỉ khi $(k, d) = 1$. Có đúng $\phi(d)$ số k như vậy, và do đó suy ra $F(d) \leqslant \phi(d)$. Định lý được chứng minh. □

Hệ quả 4. *Mọi số nguyên tố đều có căn nguyên thủy.*

Chứng minh. Giả sử p là số nguyên tố. Khi đó $\phi(p-1)$ số nguyên bậc $(p-1)$ không đồng dư từng cặp modulo p (định lý 14). Theo định nghĩa, mỗi số đó là một căn nguyên thủy, cho nên p có $\phi(p-1)$ căn nguyên thủy. □

Phần còn lại của bài viết, chúng ta sẽ đi tìm tất cả các số nguyên dương có căn nguyên thủy.

Định lý 16. *Nếu p là một số nguyên tố lẻ với căn nguyên thủy r, thì hoặc r, hoặc $r+p$ là căn nguyên thủy modulo p^2.*

Chứng minh. Vì r là căn nguyên thủy modulo p nên ta có

$$\text{ord}_p r = \phi(d) = p-1.$$

Giả sử $n = \text{ord}_{p^2} r$. Ta có $r^n \equiv 1 \pmod{p^2}$, và do đó $r^n \equiv 1 \pmod p$. Như vậy, bậc $p-1$ của r là một ước của n. Mặt khác, n là bậc của r modulo p^2 nên n là ước của $\phi(p^2) = p(p-1)$. Vì $n \mid p(p-1)$ và $(p-1) \mid n$ nên dễ dàng suy ra rằng, hoặc $n = p-1$, hoặc $n = p(p-1)$.

Nếu $n = p(p-1)$ thì r là căn nguyên thủy modulo p^2, vì $\text{ord}_{p^2} r = \phi(p^2)$.

Trong trường hợp còn lại, $n = p-1$, ta có $r^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$. Đặt $s = r+p$, ta cần phải chứng minh rằng s là căn nguyên thủy modulo p^2. Vì $s \equiv r \pmod p$, s cũng là căn nguyên thủy modulo p. Như vậy, theo chứng minh trên $\text{ord}_{p^2} s$ hoặc bằng $p-1$, hoặc bằng $p(p-1)$. Ta sẽ chứng tỏ rằng, bậc đó không thể là $p-1$. Ta có

$$\begin{aligned} s^{p-1} = (r+p)^{p-1} &\equiv r^{p-1} + (p-1)pr^{p-2} \pmod{p^2} \\ &\equiv 1 + (p-1)pr^{p-2} \equiv 1 - pr^{p-2} \pmod{p^2}. \end{aligned}$$

Từ đó ta có thể thấy rằng, $s^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$. Thật vậy, nếu ngược lại thì $pr^{p-2} \equiv 0 \pmod{p^2}$, nên $r^{p-2} \equiv 0 \pmod p$. Điều này không thể có, vì p không chia hết r (do r là căn nguyên thủy modulo p). Như vậy $\text{ord}_{p^2} s = p(p-1) = \phi(p^2)$, tức $s = r+p$ là căn nguyên thủy modulo p^2. Định lý được chứng minh. □

Bây giờ ta xét lũy thừa tùy ý của số nguyên tố.

Định lý 17. *Giả sử p là một số nguyên tố lẻ, khi đó p^k có căn nguyên thủy với mọi số nguyên dương k. Hơn nữa, nếu r là căn nguyên thủy modulo p^2 thì r là căn nguyên thủy modulo p^k với mọi số nguyên dương k.*

Chứng minh. Từ định lý 16 suy ra p có căn nguyên thủy r sao cho đó cũng là căn nguyên thủy modulo p^2, và do đó $r^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$. Ta sẽ chứng minh r cũng là căn nguyên thủy modulo p^k với mọi số nguyên dương k.

Bằng quy nạp có tể thấy rằng

$$r^{p^{k-2}(p-1)} \not\equiv 1 \pmod{p^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Giả sử $n = \text{ord}_{p^k} r$, ta có n chia hết $\phi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$. Mặt khác, lại có $r^n \equiv 1 \pmod{p^k}$ và $r^n \equiv 1 \pmod p$. Do đó $p-1 = \phi(p)$ chia hết n (định lý 15). Vì $(p-1) \mid n$ và $n \mid p^{k-1}(p-1)$ nên $n = p^t(p-1)$ trong đó t là số nguyên dương sao cho $, 0 \leqslant t \leqslant k-1$. Nếu $n = p^t(p-1)$ với $t \leqslant k-2$, thì ta có

$$r^{p^{k-2}(p-1)} = \left[r^{p^t(p-1)}\right]^{p^{k-2-t}} \equiv 1 \pmod{p^k}.$$

Điều này là mâu thuẫn. Vậy $\text{ord}_{p^k} r = p^{k-1}(p-1) = \phi(p^k)$, r cũng là căn nguyên thủy của p^k.

Chứng minh (1). Dễ thấy đẳng thức đúng với $k = 2$. Giả sử (1) đúng với số nguyên dương $k \geqslant 2$. Khi đó

$$r^{p^{k-2}(p-1)} \not\equiv 1 \pmod{p^k}.$$

Vì $(r, p) = 1$, ta thấy $(r, p^{k-1}) = 1$. Do đó, từ định lý Euler ta có

$$r^{p^{k-2}(p-1)} = r^{\phi(p^{k-1})} \equiv 1 \pmod{p^{k-1}}.$$

Vậy tồn tại số nguyên d sao cho

$$r^{p^{k-2}(p-1)} = 1 + dp^{k-1},$$

trong đó p không chia hết d, vì theo giả thiết $r^{p^{k-2}(p-1)} \not\equiv 1 \pmod{p^k}$.

Ta lấy lũy thừa bậc p của hai vế phương trình trên và nhận được

$$\begin{aligned} r^{p^{k-1}(p-1)} &= (1 + dp^{k-1})^p = 1 + p(dp^{k-1}) + C_p^2(dp^{k-1})^2 + \cdots + (dp^{k-1})^p \\ &\equiv 1 + dp^k \pmod{p^{k+1}}. \end{aligned}$$

Vì p không chia hết p nên ta có

$$r^{p^{k-1}(p-1)} \not\equiv 1 \pmod{p^{k+1}}.$$

Chứng minh là hoàn tất. □

Ví dụ. Ta có $r = 3$ là căn nguyên thủy modulo 7^k với mọi số nguyên dương k.

Định lý 18. *Nếu số nguyên dương n không phải là lũy thừa của một số nguyên tố hoặc hai lần lũy thừa một số nguyên tố, thì n không có căn nguyên thủy.*

Chứng minh. Giả sử n là số nguyên dương với phân tích ra thừa số nguyên tố như sau

$$n = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_m^{t_m}.$$

Giả sử n có căn nguyên thủy r, tức là $(n, r) = 1$ và $\text{ord}_n r = \phi(n)$. Vì $(r, n) =$ nên $(r, p^t) = 1$, trong đó p^t là một trong các lũy thừa nguyên tố có mặt trong phân tích trên. Theo định lý Euler, ta có

$$r^{\phi(p^t)} \equiv 1 \pmod{p^t}.$$

Giả sử U là bội chung nhỏ nhất của $\phi(p_1^{t_1}, \phi(p_2^{t_2}), \ldots, \phi(p_m^{t_m})$, tức

$$U = \left[\phi(p_1^{t_1}), \phi(p_2^{t_2}), \ldots, \phi(p_m^{t_m})\right].$$

Vì $\phi(p_1^{t_i}) \,|\, U$ nên $r^U \equiv 1 \pmod{p_i^{t_i}}$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, m$. Do đó

$$\text{ord}_n r = \phi(n) \leqslant U.$$

Mặt khác, do Phi-hàm là hàm nhân tính nên

$$\phi(n) = \phi(p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_m^{t_m}) = \phi(p_1^{t_1})\phi(p_2^{t_2}) \cdots \phi(p_m^{t_m}).$$

Như vậy, ta có

$$\phi(p_1^{t_1})\phi(p_2^{t_2}) \cdots \phi(p_m^{t_m}) \leqslant \left[\phi(p_1^{t_1}), \phi(p_2^{t_2}), \ldots, \phi(p_m^{t_m})\right],$$

tức là $\phi(p_1^{t_1}), \phi(p_2^{t_2}), \ldots, \phi(p_m^{t_m})$ phải nguyên tố cùng nhau từng đôi một. Do $\phi(p^t) = p^{t-1}(p-1)$ nên $\phi(p^t)$ chẵn nếu p lẻ, hoặc nếu $p = 2$ và $t \geqslant 2$. Vậy, các số $\phi(p_1^{t_1}), \phi(p_2^{t_2}), \ldots, \phi(p_m^{t_m})$ không nguyên tố cùng nhau từng cặp, trừ trường hợp $m = 1$ (và do đó n là lũy thừa của số nguyên tố), hoặc $m = 2$ và $n = 2p^t$, trong đó p là số nguyên tố lẻ và t là số nguyên dương. □

Định lý 19. *Nếu p là số nguyên tố lẻ và t là số nguyên dương, thì $2p^t$ có căn nguyên thủy. Cụ thể là, nếu r là căn nguyên thủy modulo p^t thì r, (tương ứng, $r+p^t$), là căn nguyên thủy modulo $2p^t$ khi r lẻ, (tương ứng, khi r chẵn).*

Chứng minh. Giả sử r là căn nguyên thủy modulo p^t, khi đó ta có

$$r^{\phi(p^t)} \equiv 1 \pmod{p^t}$$

và không có lũy thừa nào nhỏ hơn $\phi(p^t)$ thỏa mãn đồng dư.

Do $\phi(2p^t) = \phi(2)\phi(p^t) = \phi(p^t)$ nên

$$r^{\phi(p^t)} \equiv 1 \pmod{p^t}.$$

Khi r lẻ, thì

$$r^{\phi(2p^t)} \equiv 1 \pmod{2}.$$

Từ đó ta có $r^{\phi(2p^t)} \equiv 1 \pmod{2p^t}$. Vì không có lũy thừa bé hơn của r thỏa mãn đồng dư nên r chính là căn nguyên thủy của $2p^t$.

Khi r chẵn thì $r+p^t$ lẻ, do đó

$$(r+p^t)^{\phi(2p^t)} \equiv 1 \pmod{2}.$$

Vì $r+p^t \equiv r \pmod{p^t}$ nên

$$(r+p^t)^{\phi(2p^t)} \equiv 1 \pmod{p^t}.$$

Từ đây, ta có

$$(r+p^t)^{\phi(2p^t)} \equiv 1 \pmod{2p^t}$$

và vì không có lũy thừa bé hơn nào của $(r+p^t)$ thỏa mãn đồng dư, ta suy ra $r+p^t$ là căn nguyên thủy modulo $2p^t$. □

Định lý 20. *Nếu a là số nguyên lẻ và $k \geqslant 3$ là số nguyên thì*

$$a^{\frac{\phi(2^k)}{2}} = a^{2^{k-2}} \equiv 1 \pmod{2^k}.$$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp. Giả sử a là số nguyên lẻ, $a = 2b+1$. Ta có

$$a^2 = 4b(b+1)+1.$$

Vì b hoặc $b+1$ chẵn nên $8 \mid 4b(b+1)$, tức là $a^2 \equiv 1 \pmod{8}$. Như vậy, định lý đúng khi $k=3$. Giả sử đồng dư đúng với k, tức là

$$a^{2^{k-2}} \equiv 1 \pmod{2^k}.$$

Khi ấy tồn tại số nguyên d sao cho $a^{2^{k-2}} = 1 + d\cdot 2^k$. Từ đó ta có

$$a^{2^{k-1}} = 1 + d\cdot 2^{k+1} + d^2\cdot 2^{2k},$$

tức là

$$a^{2^{k-1}} \equiv 1 \pmod{2^{k+1}},$$

có nghĩa đồng dư đúng với $k+1$. Định lý được chứng minh xong. □

Từ định lý trên ta suy ra rằng, các lũy thừa 2^k với $k \geqslant 3$ không có căn nguyên thủy. Như vậy, trong các lũy thừa của 2 chỉ có 2 và 4 là có căn nguyên thủy. Kết hợp điều này với các định lý 17, 18, 19, ta có định lý sau đây

Định lý 21. *Số nguyên dương n có căn nguyên thủy khi và chỉ khi*

$$n = 2,\ 4,\ p^t,\ 2p^t,$$

trong đó p là số nguyên tố lẻ và t là số nguyên dương.

Bài tập tự luyện

Bài tập 1. Tìm tất cả các số tự nhiên n thỏa mãn $\sigma(n) + \phi(n) = 2n$.

Bài tập 2. Chứng minh rằng n là một hợp số khi và chỉ khi $\sigma(n) > n + \sqrt{n}$.

Bài tập 3. Chứng minh rằng nếu hai số nguyên có tích các ước số khác nhau thì hai số nguyên đó khác nhau.

Bài tập 4. Tính các đồng dư sau đây bằng nhiều phương pháp khác nhau:

(a) $3^{1000000} \bmod 165$;

(b) $5^{1234567} \bmod 221$;

(c) $7^{1000000000} \bmod 541$.

Bài tập 5. Chứng minh rằng nếu $n \neq 2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha$, trong đó p là số nguyên tố lẻ, thì

$$a^{\frac{\phi(n)}{2}} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Bài tập 6. Chứng minh rằng nếu n chia hết cho 24 thì $\sigma(n)$ cũng chia hết cho 24.

Bài tập 7.

(a) Chứng minh rằng nếu đa thức $f(x)$ bậc n, hệ số nguyên, có quá n nghiệm modulo p thì mọi hệ số của $f(x)$ đều chia hết cho p.

(b) Cho p là một số nguyên tố. Chứng minh rằng mọi hệ số của đa thức

$$f(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-p+1) - x^{p-1} - x + 1$$

chia hết cho p.

(c) Dùng câu (b) để chứng minh định lý Wilson.

Bài tập 8. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho: $\sigma(n) = 12, 18, 24, 48, 52, 84$.

Bài tập 9. Chứng minh rằng với mọi $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$, phương trình $\tau(n) = k$ có vô số nghiệm.

Bài tập 10. Tìm n nhỏ nhất để: $\tau(n) = 1, 2, 3, 6, 14, 100$.

Bài tập 11. Tìm căn nguyên thủy modulo: 11^2, 17^2, 13^2, 19^2, 3^k, 13^k, 11^k, 17^k.

Bài tập 12. Chứng minh rằng nếu số nguyên dương m có căn nguyên thủy thì phương trình đồng dư $x^2 \equiv 1 \pmod{m}$ chỉ có nghiệm $x \equiv \pm 1 \pmod{m}$.

Bài tập 13. Chứng minh rằng mặc dù không tồn tại căn nguyên thủy 2^k, $k \geqslant 3$, mỗi số nguyên lẻ đồng dư với đúng một số nguyên dạng $(-1)^\alpha 5^\beta$, trong đó α bằng 0 hoặc bằng 1, β là số nguyên thỏa mãn $0 \leqslant \beta \leqslant 2^{k-2} - 1$.

Bài tập 14. Giả sử n là một số có căn nguyên thủy. Chứng minh rằng tích của các số nguyên dương nhỏ hơn n và nguyên tố cùng nhau với n đồng dư (-1) modulo n (khi n là số nguyên tố, ta có định lý Wilson).

Bài tập 15. Tìm tất cả các nghiệm của các phương trình đồng dư sau:

(a) $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{7}$;

(b) $x^2 + 5x + 1 \equiv 0 \pmod{7}$;

(c) $x^2 + 3x + 1 \equiv 0 \pmod{7}$.

ĐỊNH LÝ NHỎ FERMAT

Trần Nam Dũng[1,2]

Một học sinh lớp chuyên Toán khác
với học sinh các lớp khác như thế nào?
Họ thường xuyên giải các bài toán?
Điều đó đúng.
Nhưng không chỉ có thế.
Họ còn biết định lý nhỏ Fermat.

Trong các định lý của Toán sơ cấp, với tôi, có lẽ định lý nhỏ Fermat là định lý có nhiều ứng dụng đa dạng và thú vị nhất. Kể từ ngày làm quen với định lý nhỏ Fermat ở những bài toán chia hết lớp 9, cho đến nay, khi đã trở thành giảng viên được gần 20 năm, tôi vẫn còn tìm thấy ở định lý nhỏ Fermat nhiều điều mới mẻ. Có thể nói nếu định lý lớn Fermat nổi tiếng nhờ vào sự hóc búa của nó thì định lý nhỏ Fermat lại được biết đến nhờ sự đơn giản bề ngoài cùng với nội dung sâu sắc bên trong và những ứng dụng rất đa dạng của nó.

Bài viết này sẽ giống như một câu chuyện kể về định lý nhỏ Fermat thông qua những bài toán, những định lý, những cách chứng minh, những ứng dụng của định lý Fermat mà trong quá trình học và dạy Toán tôi có dịp làm quen và tìm hiểu.

Để tiện theo dõi, xin nhắc lại định lý nhỏ Fermat là định lý được cố vấn Quốc hội Toulouse (Pháp) Pierre Fermat (1601-1665) phát biểu vào năm 1640:

Định lý 1 (Fermat). *Nếu p là số nguyên tố và a là số nguyên thì $a^p - a$ chia hết cho p.*

1 Những trường hợp riêng

Học sinh lớp 8, 9 có ý định thi vào các trường chuyên chắc chắn sẽ phải gặp bài toán:

Bài toán 1. *Chứng minh rằng nếu a là số nguyên thì $a^3 - a$ chia hết cho* 3.

Phép chứng minh khá đơn giản: cách 1 là xét 3 trường hợp $a = 3k$, $a = 3k + 1$, $a = 3k + 2$; cách 2 là phân tích $a^3 - a = (a - 1)a(a + 1)$ và lý luận trong ba số nguyên liên tiếp, luôn có một số chia hết cho 3.

Cách thứ nhất rõ ràng có thể áp dụng để chứng minh $a^5 - a$ chia hết cho 5, $a^7 - a$ chia hết cho 7. Tuy nhiên, khối lượng tính toán ngày càng tăng và rõ ràng không thể áp dụng cho trường hợp tổng quát.

[1]Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh.

[2]Trích bài giảng tại hội thảo "Các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi và các vấn đề liên quan", Phú Yên, tháng 04/2011.

Chứng minh cho $p = 5$. Để nhanh hơn, ta có thể phân tích

$$a^5 - a = (a-1)a(a+1)(a^2+1).$$

Rõ ràng nếu $a = 5k$, $5k \pm 1$ thì tích ba số hạng đầu chia hết cho 5, còn nếu $a = 5k \pm 2$ thì $a^2 + 1 = 25k^2 \pm 10k + 5$ chia hết cho 5.

Nếu khéo hơn, ta có thể viết

$$\begin{aligned} a^5 - a &= (a-1)a(a+1)(a^2+1) = (a-1)a(a+1)(a^2-4+5) \\ &= 5(a-1)a(a+1) + (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2). \end{aligned}$$

Số hạng thứ nhất hiển nhiên là chia hết cho 5, còn số hạng thứ hai thì chia hết cho 5 vì nó là tích của 5 số nguyên liên tiếp. □

Để tiện lợi hơn trong tính toán, tiếp theo chúng ta sẽ sử dụng đồng dư. Với các độc giả chưa biết đến đồng dư, tôi đưa ra định nghĩa đơn giản và ngắn gọn như sau:

Định nghĩa 1. *Ta viết $a \equiv b \pmod{n}$ nếu như a và b có cùng số dư khi chia cho n hay nói cách khác $a - b$ chia hết cho n.*

Ở đây ta sẽ sử dụng các tính chất cơ bản của đồng dư là:

Định lý 2.

(a) *Nếu $a \equiv b \pmod{n}$ và $c \equiv d \pmod{n}$ thì $a + c \equiv b + d \pmod{n}$.*

(b) *Nếu $a \equiv b \pmod{n}$ và $c \equiv d \pmod{n}$ thì $ac \equiv bd \pmod{n}$.*

(c) *Nếu $a \equiv b \pmod{n}$ thì với mọi m nguyên dương, ta có $a^m \equiv b^m \pmod{n}$.*

Ta tiếp tục với chứng minh trường hợp $p = 7$.

Chứng minh cho $p = 7$. Sử dụng các hằng đẳng thức quen thuộc, ta có

$$a^7 - a = a(a^6 - 1) = (a-1)a(a+1)(a^2+a+1)(a^2-a+1).$$

Từ đây với chú ý rằng

$$\begin{aligned} a^2 + a + 1 = (a^2 + a - 6) + 7 \equiv a^2 + a - 6 = (a-2)(a+3) \pmod{7}, \\ a^2 - a + 1 \equiv a^2 - a - 6 = (a+2)(a-3) \pmod{7}, \end{aligned}$$

ta thu được

$$a^7 - a \equiv (a-3)(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)(a+3) \pmod{7}.$$

Tích của 7 số nguyên liên tiếp là bội của 7 nên ta có điều phải chứng minh. □

Bài tập 1.

1. Chứng minh nếu a là số nguyên thì $a^{11} - a$ chia hết cho 11.
2. Chứng minh rằng nếu a là số nguyên thì $a^9 - a$ chia hết cho 30.
3. Cho n là một số tự nhiên chẵn. Hãy tìm ước số chung lớn nhất của tất cả các số có dạng $a^n - a$ với a là số nguyên.
4. Cho n là số tự nhiên, $n > 1$. Chứng minh rằng ước chung lớn nhất của tất cả các số có dạng $a^n - a$, trong đó a chạy khắp tập các số nguyên trùng với ước chung lớn nhất của tất cả các số $a^n - a$ với $a = 1, 2, \ldots, 2n$.

2 Trường hợp tổng quát

2.1 Cách chứng minh thứ nhất

Phương pháp chứng minh cho $p = 5, 7$ ở trên có thể tiếp tục mở rộng cho $p = 11, 13, \ldots$ với ngày càng nhiều những kỹ xảo hơn (giống như $a^2+a+1 \equiv a^2+a-6 = (a+3)(a-2) \pmod 7$ ở trên). Thế nhưng phương pháp đó rõ ràng không thể giúp chúng ta chứng minh cho trường hợp tổng quát.

Chứng minh dưới đây tôi được biết khi còn là một học sinh lớp 10. Tôi còn nhớ rõ tôi đọc được chứng minh này trên bài viết ở báo Toán học và Tuổi trẻ của tác giả Lê Quốc Hán. Tôi đã rất thích thú với chứng minh này do tính đơn giản và dễ hiểu của nó.

Cách đây không lâu, 30 năm sau khi tôi được đọc bài báo đó, tôi đã gặp lại tác giả, nay là PGS.TS Lê Quốc Hán, giảng viên Đại học Vinh trong dịp thầy vào giảng dạy tại trường Đại học Sài Gòn. Chúng tôi đã có dịp gặp nhau, uống bia, nói chuyện Toán và tôi có kể với PGS Lê Quốc Hán về câu chuyện 30 năm ngày trước. Và tôi cũng có hứa là sẽ viết một bài viết về câu chuyện này. Vì thế, có thể nói bài viết này được lấy cảm hứng từ cuộc gặp tình cờ với thầy Lê Quốc Hán tại thành phố Hồ Chí Minh vừa qua.

Sau đây xin được giới thiệu cách chứng minh của tác giả Lê Quốc Hán.

Chứng minh. Với p là số nguyên tố lớn hơn 2, vì $(-a)^p - (-a) = -(a^p - a)$ nên ta chỉ cần chứng minh định lý đúng với a nguyên dương. Ta chứng minh bằng quy nạp theo a.

Với $a = 1$, vì $1^p - 1 = 0$ chia hết cho p nên định lý đúng. Giả sử định lý đã đúng đến a, tức là đã có $a^p - a$ chia hết cho p. Ta chứng minh định lý đúng đến $a + 1$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}(a+1)^p - (a+1) &= a^p + C_p^1 a^{p-1} + C_p^2 a^{p-2} + \cdots + C_p^{p-1} a + 1 - (a+1)\\ &= (a^p - a) + \sum_{i=1}^{p-1} C_p^i a^{p-i}.\end{aligned}$$

Bây giờ để ý rằng với mọi $1 \leqslant i \leqslant p-1$ thì $C_p^i = \frac{p!}{i!\,(p-i)!}$ chia hết cho p (do tử số có thừa số p, còn mẫu số thì không) nên tổng phía sau chia hết cho p. Từ đó, theo giả thiết quy nạp ta có $(a+1)^p - (a+1)$ chia hết cho p. Phép chứng minh kết thúc. □

Rất đơn giản. Phép chứng minh này chỉ dựa vào tính chất cơ bản C_p^i chia hết cho p với mọi $i = 1, 2, \ldots, p-1$. Sau này tôi mới được biết rằng, tính chất này, cũng như chính định lý Fermat, có một nội dung Toán học rất sâu sắc. Chúng ta sẽ còn quay trở lại với tính chất này trong phần ứng dụng.

Bài tập 2.

1. Cho p là số nguyên tố. Chứng minh rằng

$$C_{p+1}^i \equiv \begin{cases} 1 & \text{khi } i \in \{1, p\} \\ 0 & \text{khi } i \in \{2, \ldots, p-1\} \end{cases} \pmod p.$$

2. Chứng minh rằng nếu x, y là các số nguyên và p là số nguyên tố thì ta có

   (a) $(x+y)^p \equiv x^p + y^p \pmod p$;

   (b) $(x+y)^{p^2} \equiv x^{p^2} + y^{p^2} \pmod p$.

2.2 Cách chứng minh thứ hai

Đây là cách mà tôi thường dùng để dạy bài về định lý Fermat. Cái hay của cách này là có thể mở rộng sang định lý Euler và dẫn dắt một cách tự nhiên đến khái niệm hệ thặng dư thu gọn.

Ta phát biểu lại định lý Fermat dưới dạng: *Nếu p là số nguyên tố và $(a, p) = 1$ thì*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Chúng ta hãy bắt đầu bằng một trường hợp riêng: $p = 11$ và $a = 4$. Ta lần lượt có

$$\begin{aligned}
4 \cdot 1 &\equiv 4 \pmod{11},\\
4 \cdot 2 &\equiv 8 \pmod{11},\\
4 \cdot 3 &\equiv 1 \pmod{11},\\
4 \cdot 4 &\equiv 5 \pmod{11},\\
4 \cdot 5 &\equiv 9 \pmod{11},\\
4 \cdot 6 &\equiv 2 \pmod{11},\\
4 \cdot 7 &\equiv 6 \pmod{11},\\
4 \cdot 8 &\equiv 10 \pmod{11},\\
4 \cdot 9 &\equiv 3 \pmod{11},\\
4 \cdot 10 &\equiv 7 \pmod{11}.
\end{aligned}$$

Nhân các đồng dư thức vế theo vế, với chú ý rằng ở vế phải ta có các số 1, 2, ..., 10 xếp theo một thứ tự khác, ta được

$$4^{10} \cdot 10! \equiv 10! \pmod{11}.$$

Do $(10!, 11) = 1$ nên rút gọn hai vế cho $10!$, ta được $4^{10} \equiv 1 \pmod{11}$. Như vậy ta đã chứng minh được định lý Fermat trong trường hợp $p = 11$ và $a = 4$.

Có thể sử dụng ý tưởng của cách chứng minh trên để chứng minh định lý tổng quát và hơn nữa, chứng minh mở rộng sau đây của định lý Fermat:

Định lý 3 (Euler). *Cho n là một số nguyên dương lớn hơn 1 và a là một số nguyên bất kỳ nguyên tố cùng nhau với n. Khi đó, ta có*

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n},$$

ở đây $\phi(n)$ là số các số nguyên dương nhỏ hơn n và nguyên tố cùng nhau với n.

Chứng minh. Xét $n > 1$, $(a, n) = 1$. Gọi $r_1, r_2, \ldots, r_{\phi(n)}$ là tất cả các số nguyên dương nhỏ hơn n và nguyên tố cùng nhau với n. Gọi $s_1, s_2, \ldots, s_{\phi(n)}$ tương ứng là số dư trong phép chia $ar_1, ar_2, \ldots, ar_{\phi(n)}$ cho n. Theo định nghĩa như vậy, ta có

(1) $s_1, s_2, \ldots, s_{\phi(n)} < n$;

(2) $s_1, s_2, \ldots, s_{\phi(n)}$ nguyên tố cùng nhau với n;

(3) $s_1, s_2, \ldots, s_{\phi(n)}$ đôi một phân biệt.

Như thế $s_1, s_2, \ldots, s_{\phi(n)}$ cũng là tất cả các số nguyên dương nhỏ hơn n và nguyên tố cùng nhau với n, tức là ta có

$$\{s_1, s_2, \ldots, s_{\phi(n)}\} = \{r_1, r_2, \ldots, r_{\phi(n)}\}. \tag{1}$$

Bây giờ nhân các đồng dư thức:

$$\begin{aligned} ar_1 &\equiv s_1 \pmod n, \\ ar_2 &\equiv s_2 \pmod n, \\ &\dots\dots\dots \\ ar_{\phi(n)} &\equiv s_{\phi(n)} \pmod n \end{aligned}$$

vế theo vế, ta được

$$a^{\phi(n)} r_1 r_2 \cdots r_{\phi(n)} \equiv s_1 s_2 \cdots s_{\phi(n)} \pmod n. \tag{2}$$

Mặt khác, theo (1) thì

$$r_1 r_2 \cdots r_{\phi(n)} = s_1 s_2 \cdots s_{\phi(n)}.$$

Mà $(r_1 r_2 \cdots r_{\phi(n)}, n) = 1$ nên giản ước hai vế của (2) cho $r_1 r_2 \cdots r_{\phi(n)}$, ta được

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod n.$$

Định lý Euler được chứng minh. □

Bài tập 3.

1. Chứng minh định lý Wilson: Số nguyên dương p là số nguyên tố khi và chỉ khi $(p-1)!+1$ chia hết cho p.

   Hướng dẫn. Trước hết, hãy chứng minh rằng nếu p là hợp số thì $(p-1)!+1$ không chia hết cho p. Với p nguyên tố lẻ, hãy chứng minh với mọi $i \in A = \{2, \dots, p-2\}$, tồn tại duy nhất $k \in A$ sao cho $ik \equiv 1 \pmod p$, đồng thời $k \neq i$.

2. Chứng minh rằng nếu $(m, n) = 1$ thì $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$.

   Hướng dẫn. Xếp các số $1, 2, \dots, mn$ vào bảng $m \times n$ như hình vẽ:

1	2	$\dots$	m
$m+1$	$m+2$	$\dots$	$2m$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$(n-1)m+1$	$(n-1)m+2$	$\dots$	nm

   Sau đó đếm các cột nguyên tố cùng nhau với m. Trong mỗi cột, đếm các số nguyên tố cùng nhau với n.

3. Chứng minh rằng nếu $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ thì

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

2.3 Cách chứng minh thứ ba

Cách chứng minh thứ ba khá độc đáo. Bằng tổ hợp! Ta sẽ giải một bài toán đếm mà đáp số là $\frac{a^p - a}{p}$. Vì đáp số của một bài toán đếm phải là số tự nhiên nên từ đây ta sẽ có $a^p - a \vdots p$.

Bài toán 2. *Cho p là số nguyên tố và a là số nguyên dương. Ta chia đường tròn thành p cung bằng nhau. Hỏi có bao nhiêu cách tô các cung bằng a màu? (Hai cách tô có thể thu được từ nhau qua một phép quay được coi là giống nhau.)*

Lời giải. Nếu không tính đến điều kiện 2 cách tô màu có thể thu được từ nhau qua một phép quay được coi là giống nhau thì ta có a^p cách tô màu khác nhau (mỗi cung có a cách tô). Có a cách tô chỉ dùng một màu. Với mỗi cách tô loại này, các phép quay không cho ra cách tô mới.

Còn lại $a^p - a$ cách tô sử dụng ít nhất hai màu. Với mỗi cách tô này, nếu quay các góc $\frac{2\pi}{p}$, $\frac{4\pi}{p}$, ..., $\frac{2(p-1)\pi}{p}$ ta sẽ được $p-1$ các cách tô khác (không tính đến điều kiện) đồng thời lại không tạo ra cách tô mới nếu tính đến điều kiện.

Như vậy, số cách tô khác nhau theo đúng điều kiện chỉ bằng $\frac{1}{p}$ số cách tô không tính đến điều kiện. Từ đó đáp số của bài toán là $a + \frac{a^p-a}{p}$. □

Quay trở lại phép chứng minh định lý nhỏ Fermat, đáp số ở trên là kết quả của một bài toán đếm nên phải là số nguyên, suy ra $a^p - a$ phải chia hết cho p, từ đây ta có định lý nhỏ Fermat.

Lời giải bài toán trên có thể trình bày chặt chẽ và gãy gọn hơn nếu sử dụng khái niệm quan hệ tương đương, quỹ đạo. Dưới đây chúng tôi nêu ra một số bài tập có thể giải được bằng phương pháp tương tự.

Bài tập 4.

1. Cho p, q là hai số nguyên tố phân biệt, a là số nguyên dương. Ta chia đường tròn thành pq cung bằng nhau. Hỏi có bao nhiêu cách tô các cung bằng a màu? (Hai cách tô có thể thu được từ nhau qua một phép quay được coi là giống nhau.)

2. (Việt Nam, 2010) Cho bảng 3×3 và n là một số nguyên dương cho trước. Tìm số các cách tô màu không như nhau khi tô mỗi ô bởi một trong n màu, biết rằng hai cách tô màu gọi là như nhau nếu một cách nhận được từ cách kia bởi một phép quay quanh tâm.

3 Một số ứng dụng của định lý nhỏ Fermat

3.1 Định lý Erdos-Ginzburg-Zieve

Trong ba số nguyên bất kỳ luôn có hai số có tổng chia hết cho 2. Đây là một bài toán đơn giản mà một học sinh lớp 5 cũng có thể làm được. Rất bất ngờ là bài toán này có thể tổng quát thành một định lý rất sâu sắc và đẹp:

Định lý 4 (Erdos-Ginzburg-Zieve). *Từ $2n-1$ số nguyên bất kỳ, ta luôn tìm được n số có tổng chia hết cho n.*

Chứng minh. Với n nhỏ, định lý có thể chứng minh khá dễ dàng bằng cách xét các trường hợp. Ví dụ, với $n = 3$, ta chia 5 số nguyên vào ba chuồng, chuồng chia dư 0, chuồng chia 3 dư 1 và chuồng chia 3 dư 2. Nếu mỗi chuồng đều chứa ít nhất một số thì chọn từ ba chuồng, mỗi chuồng một số, ta được ba số cần tìm. Nếu có một chuồng nào đó rỗng thì sẽ có ít nhất một chuồng có ba số và đó chính là ba số cần tìm. Với $n = 5$, ta có thể lặp lại cách chứng minh tương tự, tuy nhiên số trường hợp cần xét sẽ nhiều hơn.

Nếu n là hợp số, chẳng hạn $n = 9$, ta có thể sử dụng cách làm sau: Áp dụng kết quả với $n = 3$, từ 17 số $\{a_1, a_2, \ldots, a_{17}\}$ dĩ nhiên có thể chọn ra ba số có tổng chia hết cho 3. Không mất tính tổng quát, giả sử đó là (a_1, a_2, a_3).

Tiếp theo, từ 13 số $\{a_4, a_5, \ldots, a_{17}\}$, có thể chọn ra ba số có tổng chia hết cho 3, giả sử đó là (a_4, a_5, a_6). Tiếp tục như vậy, ta được các bộ ba số có tổng chia hết cho 3, mà, bằng cách đánh số lại nếu cần, giả sử đó là (a_7, a_8, a_9), (a_{10}, a_{11}, a_{12}), (a_{13}, a_{14}, a_{15}). Xét các số

$$s_1 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \quad s_2 = \frac{a_4 + a_5 + a_6}{3}, \quad \ldots, \quad s_5 = \frac{a_{13} + a_{14} + a_{15}}{3}.$$

Theo cách xây dựng, 5 số $s_1, s_2, \ldots, s_5$ là các số nguyên. Áp dụng kết quả với $n = 3$, ta suy ra tồn tại ba số trong 5 số này có tổng chia hết cho 3. Không mất tính tổng quát, giả sử đó là (s_1, s_2, s_3). Khi đó $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9 = 3(s_1 + s_2 + s_3)$ chia hết cho 9.

Bằng cách làm tương tự, ta thấy rằng nếu định lý đã đúng với $n = p$ và $n = q$ thì nó cũng đúng với $n = pq$. Như vậy, ta chỉ cần chứng minh bài toán đúng với $n = p$ là số nguyên tố. Ta thực hiện việc này như sau:

Giả sử ngược lại, tồn tại $2p - 1$ số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_{2p-1}$ sao cho mọi tổng con gồm p phần tử của nó đều không chia hết cho p. Khi đó, theo định lý nhỏ Fermat ta có

$$(a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_p})^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Từ đây, do có tất cả C_{2p-1}^p bộ $(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_p})$ lấy từ tập hợp $(a_1, a_2, \ldots, a_{2p-1})$ nên

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant 2p-1} (a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_p})^{p-1} \equiv C_{2p-1}^p \pmod p. \qquad (1)$$

Ta có C_{2p-1}^p không chia hết cho p. Vì thế, ta sẽ suy ra điều mâu thuẫn nếu chứng minh được rằng vế trái chia hết cho p. Ta chứng minh điều này bằng cách chứng minh rằng, trong khai triển tổng vế trái, hệ số của $a_{i_1}^{s_1} a_{i_2}^{s_2} \cdots a_{i_k}^{s_k}$ với $s_1 + s_2 + \cdots + s_k = p - 1$ chia hết cho p.

Để có những số hạng như vậy, ta cần chọn thêm $p - k$ phần tử $i_{k+1}, \ldots, i_p$ để bổ sung thành p số và xét $(a_{i_1} + \cdots + a_{i_k} + \cdots + a_{i_p})^{p-1}$. Khai triển biểu thức này, ta có hệ số của $a_{i_1}^{s_1} \cdots a_{i_k}^{s_k}$ là

$$\frac{(p-1)!}{s_1!\, s_2! \cdots s_k!}.$$

Có C_{2p-1-k}^{p-k} cách bổ sung, do đó hệ số của $a_{i_1}^{s_1} a_{i_1}^{s_2} \cdots a_{i_k}^{s_k}$ trong khai triển ở vế trái của (1) là

$$C_{2p-1-k}^{p-k} \cdot \frac{(p-1)!}{s_1!\, s_2! \cdots s_k!}.$$

Chú ý rằng do $1 \leqslant k \leqslant p - 1$ nên $C_{2p-1-k}^{p-k} = \frac{(2p-1-k)!}{(p-k)!\,(p-1)!}$ chia hết cho p. Từ đó, tất cả các số hạng $a_{i_1}^{s_1} a_{i_2}^{s_2} \cdots a_{i_k}^{s_k}$ trong khai triển ở vế trái của (1) đều có hệ số chia hết cho p, tức là vế trái chia hết cho p, mâu thuẫn. Mâu thuẫn này chứng tỏ điều giả sử là sai. Định lý được chứng minh cho $n = p$ và như vậy cho n bất kỳ. □

Bài tập 5.

1. Chứng minh rằng từ 5 số nguyên bất kỳ luôn tìm được một số hoặc một số số có tổng chia hết cho 5.

2. Chứng minh rằng từ 9 số nguyên bất kỳ luôn tìm được 5 số có tổng chia hết cho 5.

3. Cho p là số nguyên tố và a, b, c là các số nguyên bất kỳ. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên x, y, z không đồng thời chia hết cho p sao cho $ax^2 + by^2 + cz^2$ chia hết cho p.

   Hướng dẫn. Nếu $ax^2 + by^2 + cz^2$ không chia hết cho p thì
   $$(ax^2 + by^2 + cz^2)^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

3.2 Định lý Lucas

Ta nhận thấy rằng tất cả các số trong dòng thứ 3 và dòng thứ 7 của tam giác Pascal đều lẻ:

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Nhận xét thực nghiệm này có thể phát biểu thành một kết quả tổng quát: Các hệ số nhị thức C_n^k lẻ với mọi $k = 0, 1, \ldots, n$ khi và chỉ khi n có dạng $n = 2^m - 1$. Và kết quả này lại chỉ là một trường hợp riêng của định lý Lucas sau đây:

Định lý 5 (Lucas). *Cho m, n là hai số tự nhiên và p là một số nguyên tố. Giả sử*

$$m = m_k p^k + m_{k-1} p^{k-1} + \cdots + m_2 p^2 + m_1 p + m_0$$

và

$$n = n_k p^k + n_{k-1} p^{k-1} + \cdots + n_2 p^2 + n_1 p + n_0.$$

Khi đó, ta có $C_n^m \equiv \prod_{i=0}^{k} C_{n_i}^{m_i} \pmod p$ (quy ước rằng $C_b^a = 0$ với $a > b$).

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử $m > n$ (nếu $m = n$ thì bổ đề hiển nhiên đúng). Trước hết, ta thấy rằng $(p, i) = 1$, $\forall i = 1, 2, \ldots, p-1$ nên

$$C_p^k = \frac{p!}{k!\,(p-k)!} = p \cdot \frac{(p-1)!}{k!\,(p-k)!} \vdots p,$$

tức là

$$C_p^k \equiv 0 \pmod p, \quad \forall k = 1, 2, \ldots, p-1.$$

Ta có

$$(x+1)^p = x^p + 1 + \sum_{i=1}^{p-1} C_p^i x^{p-i} \equiv x^p + 1 \pmod p. \tag{1}$$

Ta sẽ chứng minh nhận xét:

$$(x+1)^{p^j} \equiv x^{p^j} + 1 \pmod p, \quad \forall j \in \mathbb{N}^*$$

bằng quy nạp. Thật vậy, với $j = 1$, nhận xét đúng theo (1). Giả sử nhận xét này đúng với $j = h \geqslant 1$. Ta sẽ chứng minh rằng nó cũng đúng với $j = h + 1$. Ta có

$$(x+1)^{p^h} \equiv x^{p^h} + 1 \pmod p.$$

Từ đó suy ra

$$\left[(x+1)^{p^h}\right]^p \equiv \left(x^{p^h} + 1\right)^p \equiv \left(x^{p^h}\right)^p + 1 \pmod p,$$

hay

$$(x+1)^{p^{h+1}} \equiv x^{p^{h+1}} + 1 \pmod p.$$

Vậy nhận xét đúng với $j = h + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, nhận xét được chứng minh.

Bây giờ, ta xét khai triển sau

$$(1+x)^m = (1+x)^{\sum_{i=0}^{k} m_i p^i} \equiv \prod_{i=0}^{k} (1+x^{p^i})^{m_i} \equiv \prod_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m_i} C_{m_i}^j x^{jp^i} \pmod{p}.$$

Hệ số của x^n ở vế $(1+x)^m$ là C_m^n; do biểu diễn $n = n_k p^k + n_{k-1} p^{k-1} + \cdots + n_2 p^2 + n_1 p + n_0$ là duy nhất nên hệ số của x^n ở vế $\prod_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m_i} C_{m_i}^j x^{jp^i}$ là $\prod_{i=0}^{k} C_{n_i}^{m_i}$. Từ đó ta được

$$C_n^m \equiv \prod_{i=0}^{k} C_{n_i}^{m_i} \pmod{p}.$$

Định lý được chứng minh. □

Ta có thể thấy rất rõ ý tưởng chứng minh định lý Lucas cũng xuất phát từ tính chất C_p^k chia hết cho p nếu p nguyên tố và $k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$.

Bài tập 6.

1. Cho số nguyên dương n. Chứng minh rằng C_n^k lẻ với mọi $k = 0, 1, \ldots, n$ khi và chỉ khi n có dạng $n = 2^m - 1$.

2. (Việt Nam, 2010) Gọi S_n là tổng bình phương các hệ số trong khai triển của nhị thức $(1+x)^n$, trong đó n là số nguyên dương và x là số thực bất kỳ. Chứng minh rằng $S_{2n}+1$ không chia hết cho 3 với mọi n.

3.3 Một số ứng dụng khác trong Toán sơ cấp

Trong mục này, chúng tôi sẽ đưa ra một số định lý, bổ đề và bài toán có liên quan đến định lý nhỏ Fermat.

Bổ đề 1. *Số nguyên dạng x^2+1 không có ước nguyên tố dạng $4k+3$.*

Chứng minh. Giả sử tồn tại $p = 4k+3$ sao cho x^2+1 chia hết cho p, tức là

$$x^2 \equiv -1 \pmod{p}.$$

Nâng hai vế lên lũy thừa $2k+1$, ta có

$$x^{4k+2} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Nhưng theo định lý nhỏ Fermat thì

$$x^{4k+2} \equiv 1 \pmod{p},$$

nên từ đây ta suy ra $2 \equiv 0 \pmod{p}$. Mâu thuẫn. □

Chú ý là số nguyên dạng $4k+3$ có ít nhất một ước số dạng $4k+3$, từ đó ta có hệ quả sau.

Hệ quả 1. *Số nguyên dạng x^2+1 không có ước nguyên dương dạng $4k+3$.*

Bổ đề và hệ quả trên có những ứng dụng hết sức hiệu quả trong việc chứng minh sự vô nghiệm của một số phương trình Diophant.

Bài tập 7.

1. (Euler) Chứng minh rằng phương trình $4xy - x - y = z^2$ không có nghiệm nguyên dương.
2. (Lebesgue) Chứng minh rằng phương trình $x^2 - y^3 = 7$ không có nghiệm nguyên dương.
3. Chứng minh rằng có vô số số nguyên tố dạng $4k + 1$.

Tương tự với bổ đề 1, bổ đề 2 sau đây cũng rất hữu ích.

Bổ đề 2. *Chứng minh rằng số nguyên dạng $x^2 + 3$ không có ước số nguyên tố dạng $6k + 5$.*

Chứng minh. Giả sử ngược lại, tồn tại x và $p = 6k + 5$ sao cho

$$x^2 + 3 \equiv 0 \pmod p.$$

Vì nếu x thỏa mãn đồng dư thức trên thì $x + p$ cũng thỏa mãn đồng dư thức nên ta có thể giả sử x lẻ. Đặt $x = 2y + 1$, ta suy ra

$$4y^2 + 4y + 4 \equiv 0 \pmod p.$$

Do $(4, p) = 1$ nên ta có

$$y^2 + y + 1 \equiv 0 \pmod p,$$

hay

$$y^3 \equiv 1 \pmod p.$$

Nâng hai vế lên lũy thừa $2k + 1$, ta được

$$y^{6k+3} \equiv 1 \pmod p.$$

Mặt khác, theo định lý nhỏ Fermat thì

$$y^{6k+4} \equiv 1 \pmod p.$$

Kết hợp với trên, ta được $y \equiv 1 \pmod p$, từ đó suy ra $3 \equiv 0 \pmod p$, mâu thuẫn. Vậy điều giả sử là sai và ta có điều phải chứng minh. □

Bài tập 8. Chứng minh có vô số số nguyên tố dạng $6k + 1$.

Bài toán 3. *Chứng minh rằng không tồn tại số lẻ $n > 1$ sao cho $3^n + 1$ chia hết cho n.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử tồn tại n lẻ, $n > 1$ sao cho $3^n + 1$ chia hết cho n. Gọi p là ước nguyên tố nhỏ nhất của n, khi đó p lẻ và ta có

$$3^n + 1 \equiv 0 \pmod p.$$

Suy ra

$$3^{2n} \equiv 1 \pmod p.$$

Mặt khác, theo định lý nhỏ Fermat thì ta có

$$3^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Vì p là ước số nguyên tố nhỏ nhất của n nên ta có $(n, p-1) = 1$, suy ra $(2n, p-1) = 2$. Theo định lý Bezout, tồn tại các số nguyên x, y sao cho $2nx + (p-1)y = 2$. Áp dụng các đồng dư thức ở trên ta suy ra

$$3^2 = 3^{2nx+(p-1)y} \equiv 1 \pmod p,$$

hay

$$8 \equiv 0 \pmod p.$$

Mâu thuẫn vì p là số nguyên tố lẻ. Vậy điều giả sử là sai và ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 4. *Chứng minh rằng mọi ước số nguyên tố của số $F_n = 2^{2^n} + 1$ có số dư bằng* 1 *khi chia cho* 2^{n+1}.

Chứng minh. Giả sử $F_n = 2^{2^n} + 1$ chia hết cho số nguyên tố p. Khi đó ta có

$$2^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod p.$$

Gọi h là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $2^h \equiv 1 \pmod p$. Khi đó do $2^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod p$ nên ta suy ra $h \mid 2^{n+1}$, tức $h = 2^k$. Nếu $k \leqslant n$ thì từ đây ta suy ra $2^{2^n} \equiv 1 \pmod p$, mâu thuẫn với điều kiện $2^{2^n} \equiv -1 \pmod p$. Vậy

$$h = 2^{n+1}.$$

Bây giờ, áp dụng định lý nhỏ Fermat ta có

$$2^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Từ định nghĩa của h, ta lại suy ra $p - 1 \,\vdots\, h = 2^{n+1}$ và đó chính là điều phải chứng minh. □

Bài tập 9.

1. (Việt Nam, 2001) Cho số nguyên dương n và hai số nguyên nguyên tố cùng nhau a, b lớn hơn 1. Giả sử p, q là hai ước lẻ lớn hơn 1 của $a^{6^n} + b^{6^n}$. Hãy tìm số dư trong phép chia $p^{6^n} + q^{6^n}$ cho $6 \cdot (12)^n$.

2. Chứng minh rằng phương trình $x^7 + y^7 = 1998^z$ không có nghiệm nguyên dương.

3. Cho k là một số nguyên dương lớn hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n sao cho $2^{2^n} + k$ là hợp số.

4. (Việt Nam, 2011) Cho dãy số nguyên (a_n) được xác định bởi $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ và

$$a_n = 6a_{n-1} + 5a_{n-2},$$

với mọi $n \geqslant 2$. Chứng minh rằng $a_{2012} - 2010$ chia hết cho 2011.

4 Hệ mã RSA

Với sự bùng nổ của Internet, các giao thức giao dịch điện tử đã trở thành một thành phần không thể thiếu được trong đời sống, những khái niệm như thanh toán điện tử, ngân hàng điện tử, chữ ký điện tử... đã trở bên quen thuộc. Và nền tảng bảo mật của các giao thức điện tử đó là các hệ thống mã công khai mà thông dụng và nổi bật nhất là hệ mã RSA do ba nhà Toán học Rivest, Shamir và Adleman đề xuất vào năm 1978. Cơ sở Toán học của thuật toán này chính là định lý Euler.

Thuật toán được xây dựng như sau: Người ta lấy hai số nguyên tố đủ lớn p, q và tính $n = pq$, $\phi(n) = (p-1)(q-1)$. Sau đó người ta chọn một số nguyên dương e sao cho $\big(e, \phi(n)\big) = 1$. Cặp (e, n) được công khai và là khóa lập mã.

Người ta dùng thuật toán Euclide tìm được số nguyên dương d sao cho $ed \equiv 1 \pmod{\phi(n)}$. d sẽ là khóa bí mật, dùng để giải mã. p, q, $\phi(n)$ và d được giữ bí mật.

Để lập mã, với văn bản cần mã hóa là P, người ta tính $C = P^e \mod n$. C chính là văn bản đã được mã hóa. Sau khi nhận được văn bản đã được mã hóa C, muốn tìm lại P, người ta tính $C^d \mod n$ bằng cách sử dụng định lý Euler:

$$C^d = (P^e)^d = P^{ed} = P^{1+k\phi(n)} \equiv P \pmod n.$$

Tính an toàn của hệ mã RSA dựa trên độ khó của hai bài toán sau:

(a) Nếu biết $P^e \mod n$, e và n thì khó tìm được P (bài toán logarith rời rạc).

(b) Việc phân tích số nguyên dương n ra thừa số nguyên tố (để tìm p, q, qua đó tìm được $\phi(n)$ và sau đó tìm được d) là khó (bài toán phân tích ra thừa số).

Chính hệ mã RSA đã biến lý thuyết Số từ một khoa học thuần túy lý thuyết thành một môn khoa học ứng dụng. Hiện nay, Số học Thuật toán là một môn học không thể thiếu được trong các khoa máy tính của các trường Đại học.

Bài tập 10. Cho $n = pq$. Chứng minh rằng nếu ta biết n và $\phi(n)$ thì có thể biết được p, q. Từ đó suy ra độ khó của bài toán tìm $\phi(n)$ tương đương với độ khó của bài toán phân tích n ra thừa số.

Tài liệu tham khảo

[1] Senderov V., Spivak A., *Định lý nhỏ Fermat*, Kvant 1, 3, 04/2000.

[2] Hà Huy Khoái, Phạm Huy Điển, *Số học Thuật toán: Cơ sở lý thuyết và tính toán thực hành*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2002.

[3] Nguyễn Văn Mậu, Trần Nam Dũng, Đặng Hùng Thắng, Đặng Huy Ruận, *Một số vấn đề Số học chọn lọc*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2008.

[4] Một số tài liệu từ Internet, trong đó có đề thi và bài giải đề chọn học sinh giỏi Quốc gia 2010, đề chọn đội tuyển dự thi Olympic Toán Quốc tế 2010.

ỨNG DỤNG LƯỚI ĐIỂM NGUYÊN GIẢI TOÁN SỐ HỌC VÀ TỔ HỢP

Huỳnh Tấn Châu[2]

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, mỗi điểm có hoành độ và tung độ là các số nguyên được gọi là một *điểm nguyên* và tập hợp các điểm nguyên gọi là *lưới điểm nguyên* (hay lưới Gauss). Do chỉ giới hạn trong tập $\mathbb{Z}$ nên việc sử dụng lưới điểm nguyên tỏ ra thuận lợi khi giải quyết các bài toán Số học.

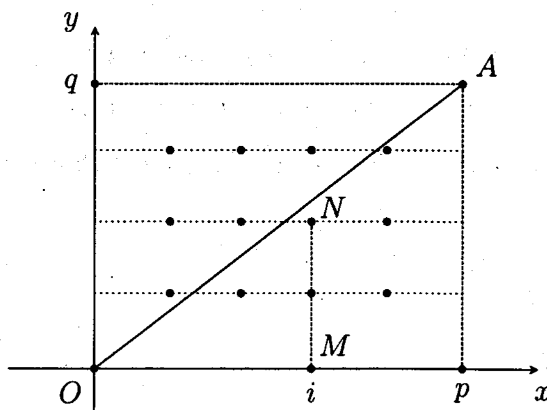
Bài viết này sẽ trình bài một số ứng dụng của lưới điểm nguyên trong giải toán. Trước hết, chúng ta sẽ bắt đầu bằng bài toán sau đây:

Bài toán 1. *Cho $p, q \in \mathbb{Z}^+$ và $(p, q) = 1$. Chứng minh rằng*

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2q}{p} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(p-1)q}{p} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2},$$

ở đây $\lfloor a \rfloor$ là phần nguyên của số a, tức số nguyên lớn nhất không vượt quá a.

Chứng minh. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, xét các điểm nguyên nằm trong hình chữ nhật đường chéo OA, với $A(p, q)$. Ta thấy ngay có $(p-1)(q-1)$ điểm như thế.



Do $(p, q) = 1$ nên không có điểm nào nằm trên đường chéo, do đó OA chia chúng thành hai phần đối xứng nhau. Xét phần nằm dưới OA, ta thấy số điểm nằm trên đường thẳng $x = i$, $0 < i < p$ là

$$[MN] = \left\lfloor \frac{iq}{p} \right\rfloor.$$

Vậy số điểm nằm dưới đường chéo OA là

$$\sum_{i=1}^{p-1} \left\lfloor \frac{iq}{p} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Do tính đối xứng của p và q nên ta có điều phải chứng minh. □

[2]Giáo viên trường THPT Chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên.

Với cách nhìn như trên, bạn đọc có thể dễ dàng giải quyết được bài toán:

Bài toán 2. *Cho* $a, b \in \mathbb{Z}^+$ *và* $(a, b) = 1$. *Tìm số các số tự nhiên* n *sao cho*

$$n \notin \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{N}\}.$$

Bây giờ, ta tiếp tục với:

Bài toán 3. *Với mọi số thực* $t > 0$, *gọi* $d(t)$ *là số các phân số tối giản* $\frac{p}{q}$ *mà* $0 < p, q \leqslant t$. *Với* $m, n \in \mathbb{Z}^+$, *hãy tính tổng*

$$S = d\left(\frac{m}{1}\right) + d\left(\frac{m}{2}\right) + \cdots + d\left(\frac{m}{n}\right).$$

Lời giải. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, ta đồng nhất mỗi phân số $\frac{a}{b}$ (không nhất thiết tối giản) với điểm $M(a, b)$. Xét các điểm nguyên không nằm ngoài hình chữ nhật đường chéo AB, với $A(1, 1)$ và $B(m, n)$. Giả sử một đường thẳng l nào đó qua O và chứa các điểm nguyên $(p, q), (2p, 2q), \ldots, (kp, kq)$ với $(p, q) = 1$. Vì $kp \leqslant m$ và $kq \leqslant n$ nên ta có

$$p \leqslant \frac{m}{k} < \frac{m}{k-1} < \cdots < \frac{m}{1}, \quad q \leqslant \frac{n}{k} < \frac{n}{k-1} < \cdots < \frac{n}{1}.$$

Suy ra phân số tối giản $\frac{p}{q}$ được tính k lần trong các số $d\left(\frac{m}{1}\right), d\left(\frac{m}{2}\right), \ldots, d\left(\frac{m}{k}\right)$. Điều đó cho thấy S chính là số tất cả các điểm không nằm ngoài hình chữ nhật đường chéo AB, và như vậy ta có $S = mn$. □

Bài toán 4.

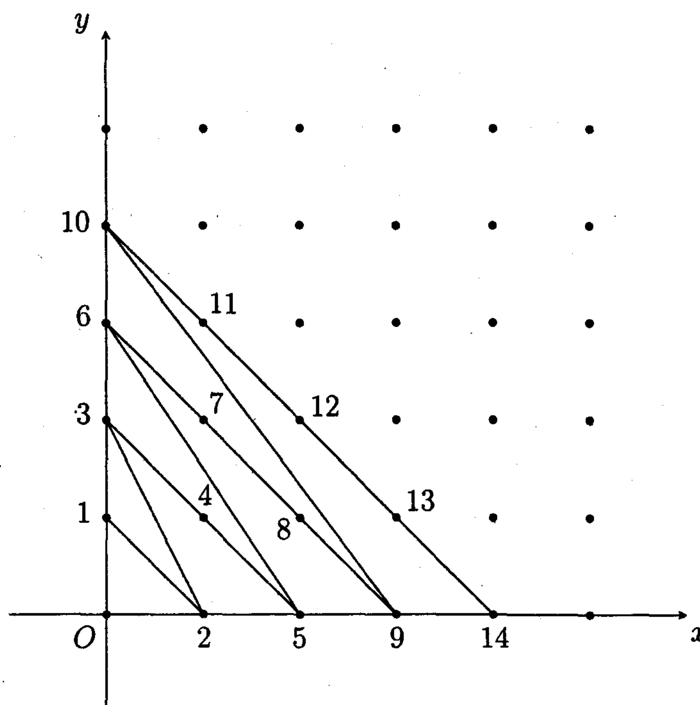
(*a*) *Chứng minh rằng với mọi* $n \in \mathbb{N}$, *tồn tại duy nhất* $x_n, y_n \in \mathbb{N}$ *sao cho*

$$2n = (x_n + y_n)^2 + 3x_n + y_n.$$

(*b*) *Với các cặp* (x_n, y_n) *tìm được ở câu (a), hãy chứng minh*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{2015} = y_1 + y_2 + \cdots + y_{2015} = 41664.$$

Chứng minh. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, gọi T_n là điểm thứ n trong dãy điểm chỉ ra trên hình vẽ dưới đây.



Dễ dàng chứng minh nếu toạ độ của T_n là (x_n, y_n) thì ta có $(x_n + y_n)^2 + 3x_n + y_n = 2n$. Do đó, kết quả câu (a) là hiển nhiên.

Bây giờ, ta chứng minh câu (b). Để ý rằng T_{2015} là điểm thứ 62 trên trục hoành và

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{2015} \overrightarrow{OT_i} = \left(\sum_{i=1}^{2015} x_i, \sum_{i=1}^{2015} y_i\right).$$

Gọi $\vec{v}$ là vector đường chéo hình vuông đơn vị. Dễ thấy tổng các vector $\overrightarrow{OT_i}$ với các điểm T_i nằm trên cạnh huyền của tam giác cạnh k vuông cân ở O bằng $\frac{k(k+1)}{2}\vec{v}$, do đó

$$\vec{V} = \frac{\vec{v}}{2}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + 62 \cdot 63) = \frac{\vec{v}}{6}[1 \cdot 2 \cdot (3 - 0) + \cdots + 62 \cdot 63 \cdot (64 - 61)] = 41664\vec{v},$$

từ đây suy ra điều phải chứng minh. □

Ứng dụng lưới điểm nguyên, chúng ta có một phương pháp thuận tiện để thiết lập và chứng minh các công thức tổ hợp: Trong hệ tọa độ Oxy, người ta gọi một đường đi từ M tới N là một đường gấp khúc nối M và N, còn đường đi ngắn nhất là đường gấp khúc tạo bởi các đoạn thẳng đơn vị ngang và dọc sao cho số đoạn thẳng là ít nhất. Phương pháp chứng minh một công thức tổ hợp bởi số đường đi ngắn nhất gọi là *phương pháp quỹ đạo*.

Chẳng hạn, công thức quen thuộc $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ có thể nhìn nhận như sau: có C_n^k đường đi ngắn nhất để đi từ $O(0, 0)$ tới $A(n, n-k)$, trong đó gồm C_{n-1}^{k-1} đường đi ngắn nhất từ O tới $B(k-1, n-k)$ và C_{n-1}^k đường đi ngắn nhất từ O tới $C(k, n-k-1)$ (lưu ý rằng mỗi đường đi từ O tới A nhất thiết phải qua B hoặc C).

Bài toán 5. *Cho $m, n, k \in \mathbb{Z}^+$ và $m > k$. Chứng minh rằng*

$$C_{m+n+1}^k = C_m^k C_n^0 + C_{m-1}^{k-1} C_{n+1}^1 + \cdots + C_{m-k}^0 C_{n+k}^k.$$

Chứng minh. Có C_{m+n+1}^k đường đi nối $O(0, 0)$ với $M(m+n-k+1, k)$. Mặt khác, dễ thấy có $C_{m-i}^{k-i} C_{n+i}^i$ đường cắt đường thẳng $x = n + \frac{1}{2}$ tại điểm có tung độ i ($i = 0, 1, \ldots, k$) gồm: C_{n+i}^i đường nối O với điểm (n, i), 1 đường nối điểm (n, i) với điểm $(n+1, i)$ và C_{m-i}^{k-i} đường nối điểm $(n+1, i)$ với M. Từ đó, ta có điều phải chứng minh. □

Cần lưu ý rằng bản chất của phương pháp quỹ đạo là sử dụng song ánh bằng cách đếm số phần tử một tập hợp theo hai cách khác nhau. Bạn đọc có thể tìm thấy lời giải khác của bài toán 5 trong bài "Phương pháp song ánh trong toán tổ hợp" (xem ở [5]).

Với cách sử dụng phương pháp quỹ đạo như trên, bạn đọc hãy thử giải bài toán sau:

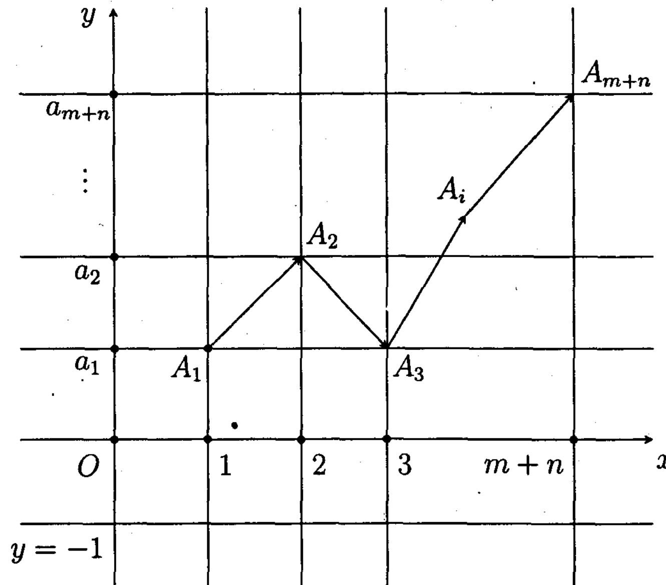
Bài toán 6. *Cho $m, n \in \mathbb{Z}^+$ và $m \geqslant 2n - 1$. Chứng minh rằng*

$$C_m^n = C_{m-1}^{n-1} + C_{m-2}^{n-1} + \cdots + C_{m-n}^{n-1}.$$

Bây giờ chúng ta sẽ khảo sát trường hợp phức tạp hơn là các đường đi bị chặn bởi một đường thẳng nào đó.

Bài toán 7. *Có $m + n$ người đi mua vé ($n > m$), trong đó có m người mang tiền loại 2 đồng, n người mang tiền loại 1 đồng và mỗi vé giá 1 đồng. Biết rằng ban đầu người bán vé không mang theo tiền, hỏi có bao nhiêu cách xếp $m + n$ người vào mua vé để người nào cũng được thối tiền (nếu có) ngay lập tức?*

Lời giải. Đặt $a_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_i$, trong đó x_i bằng 1 nếu người thứ i mang tiền loại 1 đồng và bằng -1 nếu ngược lại.



Bài toán quy về việc đếm số đường đi qua các điểm $A_i(i, a_i)$ mà không nằm dưới trục hoành trong mặt phẳng toạ độ Oxy. Muốn vậy ta sẽ đếm số đường đi cắt đường thẳng $(d) : y = -1$. Xây dựng một song ánh từ mỗi đường Q như vậy đến một đường Q' là đường nhận được từ Q khi cho đối xứng phần của Q kể từ điểm đầu tiên gặp (d). Nếu Q' có x đoạn hướng lên và y đoạn hướng xuống thì $x + y = m + n$ và $y - x = n - m + 2$, suy ra $y = n + 1$. Vậy số đường Q' là C_{m+n}^{n+1}, từ đó suy ra đáp số cần tìm là $C_{m+n}^{n} - C_{m+n}^{n+1}$. □

Để thấy rõ hơn hiệu quả của phương pháp, ta sẽ dùng một cách khác để giải bài toán trên trong trường hợp đặc biệt hơn là khi $m = n$, cụ thể là:

Cách chứng minh khác cho trường hợp $m = n$. Giả sử có $2n$ người khách, n người trong đó có 1 đồng và n người còn lại có 2 đồng. Ta cũng cần tính số cách sắp xếp $2n$ người này thỏa mãn điều kiện đề bài, tức là người bán vé có thể bán được ngay vé cho những người khách mà không có ai phải đứng chờ.

Ta xét bài toán dưới một hình thức khác cho dễ lập luận. Đặt $2n$ số, bao gồm n số 1 và n số 2 lên một hàng và đánh số chúng từ 1 đến $2n$ theo chiều từ trái sang phải. Với mỗi $1 \leqslant i \leqslant 2n$, ta gọi a_i, b_i lần lượt là số các số 1 và số các số 2 tính từ vị trí i trở về trước, dễ thấy rằng $i = a_i + b_i, \forall i = \overline{1, 2n}$. Chúng ta cần tính số trường hợp thỏa $a_i \geqslant b_i, \forall i$. Ta gọi S là tập hợp các hoán vị $(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{2n})$ của $2n$ phần tử trên thỏa đề bài và T là tập hợp còn lại. Khi đó, $|T| = C_{2n}^{n} - |S|$ và ta sẽ tính $|T|$ trước.

Do cách xác định T nên với mỗi phần tử $t = (t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{2n})$ của T, ta thấy tồn tại ít nhất một số i thỏa $a_i < b_i$. Gọi $f(t)$ là số thứ tự đầu tiên thỏa mãn $a_i < b_i$, tức là trước đó, a_i vẫn không bé hơn b_i và ngay tại thời điểm đó thì b_i hơn a_i đúng một phần tử, tức là $f(t)$ phải là số lẻ vì $f(t) = a_i + b_i$. Khi đó, ta tính được

$$a_{f(t)} = \frac{f(t)-1}{2}, \quad b_{f(t)} = \frac{f(t)+1}{2}, \quad t_{f(t)} = 2.$$

Tại thời điểm này, số các số 2 hơn số các số 1 đúng một đơn vị nên khi ta đổi giá trị của các vị trí phía sau $t_{f(t)}$, từ 1 sang 2, từ 2 sang 1 thì ta sẽ có một hoán vị của $n + 1$ số 2 và $n - 1$

số 1. Xét ví dụ minh họa trong trường hợp $n = 6$ như sau

$$T = \{1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 1\},$$
$$a_i = \{1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6\},$$
$$b_i = \{0, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6\},$$
$$f(t) = 3, \quad a_2 = 1, \quad b_2 = 1, \quad t_3 = 2,$$
$$g(t) = \{1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2\}.$$

Khi đó, g là một ánh xạ từ T sang U, với U là một hoán vị của $n+1$ số 2 và $n-1$ số 1. Ta sẽ chứng minh g là song ánh. Thật vậy, gọi u là một phần tử của U. Ta sẽ đếm số các số 1 và số các số 2 từ trái sang phải. Cũng gọi i là vị trí nhỏ nhất sao cho nếu tính từ đó về trước thì số các số 2 lớn hơn số các số 1, do cách xác định U nên vị trí đó luôn tồn tại duy nhất. Tiếp tục chuyển đổi 1 sang 2, 2 sang 1 ở các vị trí phía sau i. Ban đầu, số các số 2 hơn số các số 1 đúng một đơn vị tại i vị trí đầu và điều này cũng đúng tại $2n - i$ vị trí sau. Sau khi thay đổi số các số hơn số các số 2 đúng một đơn vị tại $2n - i$ vị trí sau; nghĩa là số các số 1 và số các số 2 là bằng nhau; tức là nó tương ứng với 1 phần tử của T. Do đó, g là một toàn ánh.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh g là đơn ánh. Gọi t và t' là hai phần tử khác nhau của T. Giả sử i là vị trí đầu tiên mà các số ở t và t' khác nhau. Không mất tính tổng quát, giả sử $t_i = 1$ và $t'_i = 2$. Khi đó dễ thấy $f(t) \neq i$. Ta có hai trường hợp:

- *Nếu* $f(t) < i$, thì $f(t') = f(t)$ vì tại $i - 1$ vị trí đầu, các số là giống nhau. Mà tại vị trí thứ i, $t_i = 1$, $t'_i = 2$ nên $g(t) \neq g(t')$.
- *Xét trường hợp* $f(t) > i$. Khi đó vị trí thứ i của g(t) là $t_i = 5$. Tại $i - 1$ vị trí đầu, cả hai bên đều giống nhau nên $f(t') \geqslant i$. Do đó, vị trí thứ i của $g(t')$ là $t'_i = 2$. Tức là ta cũng có $g(t) \neq g(t')$.

Như vậy, ta luôn có $g(t) \neq g(t')$ với mọi $t \neq t'$ nên g là đơn ánh. Kết hợp với trên, ta suy ra g là song ánh. Và như thế, ta tính được $|T| = |U| = C_{2n}^{n-1}$, suy ra

$$|S| = C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n-1}.$$

Kết quả này tương ứng với điều ta thu được trong bài toán trên và rõ ràng để nhận được điều này thì các bước lập luận rắc rối hơn khá nhiều. □

Bằng cách sử dụng phương pháp tương tự như bài toán 7, ta cũng có thể giải được "bài toán bầu cử" nổi tiếng sau (bạn đọc có thể thử sức):

Bài toán 8 (Bài toán Bertrand). *Trong một cuộc bầu củ, ông A có a phiếu bầu, ông B có b phiếu bầu ($a > b$). Giả thiết rằng mọi phiếu đều hoặc bầu cho A hoặc bầu cho B, không có phiếu trắng và không có phiếu gạch bỏ cả hai. Hỏi xác suất mà ông A luôn thắng ông B tại mọi thời điểm? (Đáp số: $\frac{a-b}{a+b}$.)*

Cuối cùng, chúng ta đến với một bài toán Số học pha trộn Tổ hợp tương đối khó sau đây:

Bài toán 9 (IMOSL, 2000). *Cho $p, q \in \mathbb{Z}^+$ và $(p, q) = 1$. Hỏi có bao nhiêu tập S gồm các số tự nhiên sao cho $0 \in S$ và nếu $x \in S$ thì $x + p$ và $x + q$ cũng thuộc S?*

Lời giải. Mỗi số nguyên n được biểu diễn duy nhất dưới dạng $px + qy$, với $0 \leqslant x < q$, nên ta có thể đồng nhất mỗi số nguyên n với điểm (x, y) trong mặt phẳng toạ độ.

Rõ ràng S chứa mọi điểm n không nằm dưới trục hoành, nên bài toán quy về việc tìm số cách đánh dấu các điểm nằm trong tam giác vuông cạnh huyền OA với $A(q, -p)$, sao cho nếu một điểm được đánh dấu thì những điểm bên phải và nằm trên nó cũng được đánh dấu. Ta thấy rằng mỗi cách đánh dấu như vậy tương ứng với một chuỗi gồm q số 0 và p số 1 thể hiện một con đường đi từ O tới A (0 là sang phải, còn 1 là đi xuống) mà nằm hoàn toàn trên đường OA (để ý là trừ hai đầu mút, đoạn OA không chứa điểm nguyên nào).

Phân hoạch tất cả các chuỗi thành các lớp, mà hai chuỗi bất kỳ trong một lớp là hoán vị vòng quanh của nhau. Dễ thấy mỗi lớp có $p+q$ chuỗi, hơn nữa trong mỗi lớp chỉ có đúng một chuỗi thoả mãn. Từ đó ta đi tới đáp số là $\frac{C_{p+q}^p}{p+q}$. □

Bạn đọc hãy suy nghĩ để giải quyết bài toán tương tự sau:

Bài toán 10. *Có bao nhiêu cách đánh dấu các điểm nguyên nằm trong hình chữ nhật đường chéo OM (M là một điểm nguyên dương) sao cho nếu điểm N được đánh dấu thì tất cả các điểm nằm trong hoặc trên cạnh hình chữ nhật ON (tất nhiên trừ N) không được đánh dấu?*

Để kết thúc bài viết này, xin nêu thêm một số bài toán để luyện tập:

Bài tập 1. Cho các số nguyên dương đôi một nguyên tố cùng nhau $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Hãy tìm số tất cả các số tự nhiên m sao cho

$$m \notin \{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \,|\, x_i \in \mathbb{N}\}.$$

Bài tập 2. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$, thì

$$C_{2n}^n = (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \cdots + (C_n^n)^2.$$

Bài tập 3. Tìm số các dãy hữu hạn $(a_i)_{i=0}^n$ thoả đồng thời các tính chất:

(a) $a_0 = 0$ và $a_i \in \mathbb{N}$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$;

(b) $|a_i - a_{i+1}| = 1$, $\forall 0 \leqslant i \leqslant n-1$.

Bài tập 4. Giả sử $A(a, \alpha)$, $B(b, \beta)$ là các điểm có toạ độ nguyên, hơn nữa $b > a \geqslant 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, và $A'(a, -\alpha)$ là điểm đối xứng với A qua trục Ox. Chứng minh rằng số các đường đi từ A đến B cắt trục Ox hoặc có điểm chung với Ox bằng số các đường đi từ A' đến B.

Bài tập 5 (Việt Nam, 2003). Trong mặt phẳng tọa độ, cho bốn điểm phân biệt $A(0, 0)$, $B(p, 0)$, $C(m, q)$, $D(m, n)$ với m, n, p, q là bốn số nguyên dương thỏa mãn $p < m$ và $n < q$. Xét một đường đi f từ A đến D và một đường đi g từ B đến C thỏa mãn điều kiện: các đường này chỉ đi theo chiều dương của các trục tọa độ và chỉ đổi hướng (từ hướng dương của trục tọa độ này sang hướng dương của trục tọa độ kia) tại các điểm có tọa độ nguyên. Gọi S là số các cặp đường đi (f, g) sao cho chúng không có điểm chung. Chứng minh rằng

$$S = C_{m+n}^{m} C_{m+q-p}^{q} - C_{m+q}^{q} C_{m+n-p}^{m}.$$

Bài tập 6. Cho số nguyên dương n. Ký hiệu τ_n là số ước số của n và σ_n là tổng các ước số của n. Chứng minh rằng

(a) $\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor$;

(b) $\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \cdots + n\left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor$.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Mậu, *Chuyên đề Tổ hợp và rời rạc*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2007.

[2] Phan Huy Khải, *Các phương pháp giải toán Giải tích-Tổ hợp*, NXB Hà Nội, 2002.

[3] Tủ sách Toán học và Tuổi trẻ, *Các bài thi Olympic Toán THPT Việt Nam (1990-2006)*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2007.

[4] Vũ Đình Hòa, *Lý thuyết Tổ hợp và các bài toán ứng dụng*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2002.

[5] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), *Toán rời rạc và một số vấn đề liên quan*, tài liệu bồi dưỡng giáo viên THPT chuyên, hè 2007.

[6] *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

[7] *Các nguồn tài liệu trên Internet.*

MỘT SỐ VẤN ĐỀ CỦA GIẢI TÍCH TỔ HỢP TRONG CHƯƠNG TRÌNH THPT

Nguyễn Khắc Minh[1]

Trong bài viết này, chúng tôi sẽ trình bày một số vấn đề có liên quan mật thiết đến các kiến thức của Giải tích Tổ hợp nằm trong khuôn khổ của chương trình giảng dạy ở các trường THPT nói chung và ở các trường THPT chuyên ban nói riêng. Để đảm bảo tính hệ thống, một số kiến thức, mặc dù đã được trình bày trong các sách giáo khoa, vẫn sẽ được nêu lại trong các phần viết dưới đây.

1 Một số khái niệm cơ bản

Định nghĩa 1. *Hai tập hợp* A *và* B *được gọi là tương đương với nhau, ký hiệu* $A \sim B$ *(hoặc* $B \sim A$*), nếu tồn tại một song ánh* f *từ* A *đến* B.

Định nghĩa 2. *Giả sử hai tập hợp* A *và* B *tương đương với nhau, khi đó ta nói rằng* A *và* B *có cùng lực lượng.*

Để ký hiệu lực lượng của tập hợp A ta có thể sử dụng một trong ba ký hiệu $|A|$, $\#A$ và $\mathrm{card}A$. Trong bài viết này, để chỉ lực lượng của tập hợp A, chúng tôi sẽ sử dụng ký hiệu $|A|$.

Định nghĩa 3. *Tập hợp* A *được gọi là tập hữu hạn nếu hoặc* A *là tập rỗng hoặc tồn tại số nguyên dương* n *sao cho* A *tương đương với tập hợp gồm* n *số nguyên dương đầu tiên.*

Trong trường hợp A là tập hữu hạn thì khái niệm lực lượng của tập A có thể được thay thế bởi khái niệm *số lượng phần tử của tập* A (hay, nói vắn tắt, *số phần tử của tập* A).

Định nghĩa 4. *Nếu* A *là tập rỗng thì nói rằng số phần tử của tập* A *bằng* 0 *(hay còn nói tập* A *có* 0 *phần tử). Nếu tập hợp* A *tương đương với tập gồm* n *số nguyên dương đầu tiên thì nói rằng số phần tử của tập* A *bằng* n *(hay còn nói tập* A *có* n *phần tử).*

Nhận xét. Từ các định nghĩa trên có thể thấy: Khi nói tập số A có n phần tử ($n \in \mathbb{N}^*$) thì cần hiểu rằng A gồm và chỉ gồm n số đôi một khác nhau.

2 Các phép toán trên các tập hợp

Định nghĩa 5. *Hợp của* n *tập hợp* ($n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$) $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *ký hiệu* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, *là tập hợp gồm tất cả các phần tử mà mỗi phần tử thuộc ít nhất một trong các tập* $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Định nghĩa 6. *Giao của* n *tập hợp* ($n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$) $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *ký hiệu* $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$, *là tập hợp gồm tất cả các phần tử mà mỗi phần tử đều thuộc tập hợp* A_i *với mọi* $i = 1, 2, \ldots, n$.

[1]Cục Khảo thí và Kiểm định chất lượng giáo dục.

Chú ý. Ở các định nghĩa trên, thay vì cho các ký hiệu $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$, người ta còn sử dụng các ký hiệu $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$.

Định nghĩa 7. *Hiệu của tập hợp A và tập hợp B, ký hiệu $A \setminus B$, là tập hợp gồm tất cả các phần tử chỉ thuộc A mà không thuộc B. Đặc biệt, nếu $B \subseteq A$ thì hiệu $A \setminus B$ còn được gọi là phần bù của tập B đối với tập A.*

Định nghĩa 8. *Tích Descartes của n tập hợp ($n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$) $A_1, A_2, \ldots, A_n$, theo thứ tự đó, là tập hợp gồm tất cả các bộ phần tử $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ mà $a_i \in A_i$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$ và được ký hiệu bởi $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$.*

Định nghĩa 9 (Tích Descartes suy rộng).

(a) *Với hai tập hữu hạn A, B và số nguyên k cho trước mà $k \leqslant |B|$, ta xây dựng tập hợp mới, ký hiệu $M(A, B, k)$ như sau:*

$$M(A, B, k) = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B \text{ và mỗi phần tử } a \text{ thuộc } A \text{ được ghép cặp với đúng } k \text{ phần tử thuộc tập hợp } B\}.$$

Khi đó, tập $M(A, B, k)$ được gọi là tích Descartes suy rộng của hai tập hợp A và B theo thứ tự đó. Đặc biệt, khi $k = |B|$ thì $M(A, B, k)$ là tích Descartes của hai tập hợp A, B theo thứ tự đó.

(b) *Với n tập hữu hạn ($n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và n số nguyên dương $k_1, k_2, \ldots, k_n$ cho trước mà $k_1 = |A_1|$, $k_i \leqslant |A_i|$ với mọi $i = \overline{2, n}$, ta xây dựng các tập hợp mới như sau:*

$$\begin{aligned}
&M_1 = A_1,\\
&M_2 = M(M_1, A_2, k_2),\\
&M_3 = M(M_2, A_3, k_3),\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&M_i = M(M_{i-1}, A_i, k_i),\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&M_n = M(M_{n-1}, A_n, k_n).
\end{aligned}$$

Ta gọi tập M_n là tích Descartes suy rộng của n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$ theo thứ tự đó, và sẽ ký hiệu tập M_n bởi $M(A_1, A_2, \ldots, A_n; k_1, k_2, \ldots, k_n)$.

3 Các tính chất cơ bản của số phần tử của tập hợp

Tính chất 1. *Nếu A, B là hai tập hữu hạn rời nhau (nghĩa là $A \cap B = \varnothing$) thì*

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Chứng minh. Nếu ít nhất một trong hai tập hợp A, B là tập $\varnothing$ thì khẳng định là hiển nhiên. Xét trường hợp $A \neq \varnothing$ và $B \neq \varnothing$. Giả sử $|A| = m$ và $|B| = n$ với $m, n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, theo hai định nghĩa 1 và 4, ta có:

- Tồn tại song ánh $f : A \to \{1, 2, \ldots, m\}$.
- Tồn tại song ánh $g : B \to \{1, 2, \ldots, n\}$.

Vì $A \cap B = \varnothing$ nên với mỗi $t \in A \cup B$ chỉ có thể xảy ra một trong hai khả năng:

(i) $t \in A$ và $t \notin B$.

(ii) $t \notin A$ và $t \in B$.

Tất cả những điều trên đây cho phép ta xây dựng ánh xạ:

$$h : A \cup B \to \{1, 2, \dots, m+n\}$$
$$t \in A \cup B \mapsto \begin{cases} f(t) & \text{nếu } t \in A \\ g(t) + m & \text{nếu } t \in B \end{cases}$$

Dễ dàng chứng minh được h là song ánh từ tập $A \cup B$ đến tập $\{1, 2, \dots, m+n\}$. Vì thế, $A \cup B \sim \{1, 2, \dots, m+n\}$, và điều này chứng tỏ $|A \cup B| = m + n = |A| + |B|$. □

Hệ quả 1. *Nếu B là tập con của tập hữu hạn A thì*

$$|A \setminus B| = |A| - |B|.$$

Chứng minh. Vì $B \subseteq A$ nên $A = (A \setminus B) \cup B$ và $(A \setminus B) \cap B = \varnothing$. Do vậy, theo tính chất 1, ta có $|A| = |A \setminus B| + |B|$, tức $|A \setminus B| = |A| - |B|$. □

Tính chất 2. *Nếu $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant 2$) là n tập hữu hạn đôi một rời nhau thì*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|.$$

Chứng minh. Dễ dàng chứng minh được kết quả này bằng phương pháp quy nạp theo n. □

Tính chất 3. *Với A, B là hai tập hữu hạn bất kỳ, ta luôn có*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Chứng minh. Ta có

$$A \cup B = A \cup \big(A \setminus (A \cap B)\big). \tag{1}$$

Dễ thấy, $A \cap B \subseteq B$ và $A \cap \big(B \setminus (A \cap B)\big) = \varnothing$. Vì thế, từ (1), theo tính chất 1 và hệ quả 1 ở trên, ta suy ra

$$|A \cup B| = |A| + \big|B \setminus (A \cap B)\big| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Tính chất 3 được chứng minh. □

Tính chất 4. *Với $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant 2$) là n tập hữu hạn bất kỳ, ta luôn có*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|.$$

Chứng minh. Đây chính là tổng quát của tính chất 3 và nó có thể được chứng minh dễ dàng bằng cách sử dụng quy nạp theo n. □

Tính chất 5. *Với A, B là hai tập hữu hạn bất kỳ, ta luôn có*

$$|A \times B| = |B \times A| = |A| \cdot |B|.$$

Chứng minh. Dễ thấy nếu ít nhất một trong hai tập A, B là tập rỗng thì khẳng định hiển nhiên đúng. Xét $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$. Đặt $|A| = m$, $m \in \mathbb{N}^*$ và giả sử $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Đặt $|B| = n$, $n \in \mathbb{N}^*$ và giả sử $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Khi đó, từ định nghĩa của $A \times B$, dễ thấy

$$A \times B = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m, \tag{1}$$

trong đó $A_i = \{(a_i, b_1), (a_i, b_2), \ldots, (a_i, b_n)\}$ với mỗi $i = 1, 2, \ldots, m$.

Hiển nhiên $A_i \cap A_j = \varnothing$, $\forall i \neq j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Vì thế, từ (1), theo tính chất 2, suy ra

$$|A \times B| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_m|. \tag{2}$$

Vì $A_i \sim B$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, m$ (dễ dàng chứng minh) nên từ (2), ta có

$$|A \times B| = m|B| = |A| \cdot |B|.$$

Tương tự, ta cũng chứng minh được $|B \times A| = |A| \cdot |B|$. □

Tính chất 6. *Với $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant 2)$ là n tập hữu hạn bất kỳ, ta luôn có*

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|.$$

Chứng minh. Dễ dàng chứng minh được kết quả này bằng phương pháp quy nạp theo n. □

Bằng các phương pháp đã sử dụng để chứng minh các tính chất 5, 6, ta sẽ chứng minh được:

Tính chất 7. *Với $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant 2)$ là n tập hữu hạn bất kỳ và $k_1, k_2, \ldots, k_n$ là n số nguyên dương cho trước thỏa mãn $k_1 = |A_1|$, $k_i \leqslant |A_i|$, $\forall i = 2, 3, \ldots, n$, ta luôn có*

$$\left|M(A_1, A_2, \ldots, A_n; k_1, k_2, \ldots, k_n)\right| = k_1 k_2 \cdots k_n.$$

4 Số phần tử của một số dạng tập hợp

Giả thiết được nêu ra dưới đây sẽ là giả thiết chung của các bài toán 1, 2, 3, 4: *Cho các số nguyên dương k, n. Xét tập A có n phần tử và $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.*

Bài toán 1. *Gọi T_1 là tập gồm tất cả các bộ $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$ có thứ tự thỏa mãn $a_{i_j} \in A$, $\forall j = 1, 2, \ldots, k$ và $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ không bắt buộc đôi một khác nhau. Chứng minh rằng*

$$|T_1| = n^k.$$

Chứng minh. Dễ thấy $T_1 = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$, với $A_1 = A_2 = \cdots = A_k$. Từ đó, theo tính chất 6, ta có ngay điều phải chứng minh. □

Bài toán 2. *Giả sử $k \leqslant n$. Gọi T_2 là tập gồm tất cả các bộ $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$ có thứ tự thỏa mãn $a_{i_j} \in A$, $\forall j = 1, 2, \ldots, k$ và $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ đôi một khác nhau. Chứng minh rằng*

$$|T_2| = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

Chứng minh. Dễ thấy $T_2 = M(A_1, A_2, \ldots, A_n; k_1, k_2 \ldots, k_n)$, trong đó $A_1 = \cdots = A_k = k$ và $n_1 = n$, $n_2 = n-1$, $\ldots$, $n_k = n-k+1$. Vì thế, sử dụng tính chất 7, ta có ngay điều phải chứng minh. □

Định nghĩa 10. *Mỗi phần tử của tập T_2 ở trên được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử $a_1, a_2, \ldots, a_n$.*

Định nghĩa 11. *Khi $k = n$ thì mỗi phần tử của tập T_2 ở trên được gọi là một hoán vị của n phần tử $a_1, a_2, \ldots, a_n$.*

Từ kết quả bài toán 2, chúng ta có:

Hệ quả 2. *Có tất cả $n!$ hoán vị của n phần tử $a_1, a_2, \ldots, a_n$.*

Bài toán 3. *Giả sử $k \leqslant n$. Gọi T_3 là tập gồm tất cả các bộ $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$ không có thứ tự thỏa mãn $a_{i_j} \in A$, $\forall j = 1, 2, \ldots, k$ và $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ đôi một khác nhau. Chứng minh rằng*

$$|T_3| = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Chứng minh. Phân hoạch tập T_2 thành các tập con $T_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$, với $T_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ là tập gồm tất cả các phần tử $t \in T_2$ mà t được tạo nên bởi k phần tử đôi một khác nhau $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ của tập A. Gọi T^* là tập gồm tất cả các tập con của phân hoạch nói trên. Dễ thấy $T^* \sim T_3$, nên

$$|T^*| = |T_3|. \qquad (1)$$

Do $|T_{i_1, i_2, \ldots, i_k}| = k!$ (theo hệ quả 2) nên ta có

$$|T^*| = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Kết hợp với (1), ta được điều phải chứng minh. □

Định nghĩa 12. *Mỗi phần tử của tập T_3 được gọi là một k-tập con của tập A có n phần tử, hay còn được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử $a_1, a_2, \ldots, a_n$.*

Chú ý. Số phần tử của tập T_3 thường được ký hiệu bởi C_n^k, hay $\binom{n}{k}$.

Bài toán 4. *Gọi T_4 là tập gồm tất cả các bộ $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$ không có thứ tự thỏa mãn $a_{i_j} \in A$, $\forall j = 1, 2, \ldots, k$ và $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ không bắt buộc đôi một khác nhau. Chứng minh rằng, khi đó ta có*

$$|T_4| = C_{n+k-1}^k.$$

Chứng minh. Xét tập $S = \{(i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_k) \mid i_j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \forall j = \overline{1, k}\}$. Dễ thấy

$$T_4 \sim S. \qquad (1)$$

Xét tương ứng

$$(i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_k) \in S \mapsto (i_1, i_2 + 1, \ldots, i_k + k - 1).$$

Dễ dàng chứng minh được rằng tương ứng nói trên xác lập một song ánh từ S đến S^*, trong đó S^* là tập gồm tất cả các bộ $(t_1, \ldots, t_k)$ không có thứ tự thỏa mãn $t_j \in \{1, 2, \ldots, n+k-1\}$ với mọi $j = 1, 2, \ldots, k$ và $t_1, t_2, \ldots, t_k$ đôi một khác nhau. Vì vậy, ta có

$$S \sim S^*. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta suy ra $T_4 \sim S^*$. Mà $|S^*| = C_{n+k-1}^k$ (theo kết quả bài toán 3) nên ta có

$$|T_4| = |S| = |S^*| = C_{n+k-1}^k.$$

Đó là điều phải chứng minh. □

Bằng phương pháp đã sử dụng ở bài toán 3, dựa vào kết quả bài toán 2 ta sẽ giải quyết được:

Bài toán 5. *Cho tập A có n phần tử ($n \in \mathbb{N}^*$) và $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Cho $n+1$ số tự nhiên $k_1, k_2, \ldots, k_n, k$ thỏa mãn điều kiện $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k$. Gọi T_5 là tập gồm tất cả các bộ $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$ có thứ tự mà trong mỗi bộ ta đều thấy phần tử a_i xuất hiện đúng k_i lần với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$. Chứng minh rằng*

$$|T_5| = \frac{k!}{k_1!\, k_2! \cdots k_n!}.$$

5 Các bài toán áp dụng

Bài toán 6. *Cho các số nguyên dương k và n. Gọi A là tập gồm tất cả các số nguyên dương a không vượt quá n và thỏa mãn $a \,\vdots\, k$. Hãy tìm $|A|$.*

Lời giải. Dễ thấy $A = \{k, 2k, \ldots, mk\}$, với m là số thỏa mãn điều kiện

$$mk \leqslant n < (m+1)k. \tag{1}$$

Từ đó suy ra $A \sim \{1, 2, \ldots, m\}$. Vì thế $|A| = m = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ (do (1)). □

Bài toán 7. *Cho số nguyên dương n và cho k số nguyên dương $a_1, a_2, \ldots, a_k$ đôi một nguyên tố cùng nhau. Ký hiệu $A = \{a \in \mathbb{N}^* \mid a \leqslant n;\ a \not\vdots\, a_i,\ \forall i = 1, 2, \ldots, k\}$. Hãy tìm $|A|$.*

Lời giải. Với mỗi $i = 1, 2, \ldots, k$, đặt $A_i = \{a \in A^* \mid a \,\vdots\, a_i\}$, với A^* là tập gồm n số nguyên dương đầu tiên. Ta có

$$A = A^* \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right). \tag{1}$$

Do A_i là tập con của tập A^* nên

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i \subseteq A^*.$$

Vì thế từ (1), theo hệ quả 1 và tính chất 4, suy ra

$$|A| = |A^*| - \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = |A^*| - \sum_{m=1}^{k} (-1)^{m-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leqslant k} \left|\bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j}\right|$$
$$= n - \left(\left\lfloor \frac{n}{a_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{a_2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{a_k} \right\rfloor\right) + \cdots + (-1)^k \left\lfloor \frac{n}{a_1 a_2 \cdots a_k} \right\rfloor.$$

Bài toán được giải quyết xong. □

Bài toán 8. *Cho số nguyên dương n. Gọi A là tập gồm tất cả các số nguyên dương $a \leqslant n$ và $(a, n) = 1$. Hãy tìm $|A|$.*

Lời giải. Giả sử n có phân tích chuẩn là

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m},$$

trong đó $k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{N}^*$ và $p_1, p_2, \ldots, p_m$ là tất cả các ước nguyên tố của n. Khi đó

$$A = \{a \in \mathbb{N}^* \mid a \leqslant n;\ a \not\vdots\, p_i,\ \forall i = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Vì thế, theo kết quả bài toán 7, ta có

$$\begin{aligned}|A| &= n - \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{p_i} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant m} \frac{n}{p_ip_j} - \cdots + (-1)^m \cdot \frac{n}{p_1p_2\cdots p_m}\\ &= n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_m}\right).\end{aligned}$$

Bài toán được giải quyết xong. □

Bài toán 9. *Cho số nguyên dương n. Gọi A là tập gồm tất cả các số nguyên dương a thỏa mãn n chia hết cho a. Hãy tìm |A|.*

Lời giải. Giả sử n có phân tích chuẩn là $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m}$, trong đó $k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{N}^*$ và $p_1, p_2, \ldots, p_m$ là tất cả các ước nguyên tố của n. Khi đó, mỗi $a \in A$ đều có dạng

$$a = p_1^{t_1}p_2^{t_2}\cdots p_m^{t_m},$$

trong đó $t_i \in \mathbb{N}$ và $t_i \leqslant k_i$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, m$.

Từ đây suy ra $A \sim B$, với B là tập gồm tất cả các bộ có thứ tự $(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ thỏa mãn $t_i \in \mathbb{N}$ và $t_i \leqslant k_i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, m$. Mặt khác, dễ thấy

$$B = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_m,$$

trong đó $B_i = \{0, 1, \ldots, k_i\}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, m$.

Vì vậy, $|A| = |B| = |B_1|\cdot|B_2|\cdots|B_n| = (1+k_1)(1+k_2)\cdots(1+k_m)$. □

Bài toán 10. *Cho các số nguyên dương k và n thỏa mãn điều kiện $n > k^2 - k + 1$. Xét n tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:*

(*i*) $|A_i| = k$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$;

(*ii*) $|A_i \cup A_j| = 2k-1$, $\forall i \neq j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Hãy tìm $\left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right|$.

Lời giải. Từ các giả thiết của bài toán suy ra

$$|A_i \cap A_j| = 1, \quad \forall i \neq j \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{1}$$

Xét một tập bất kỳ, chẳng hạn A_1. Khi đó, do (1) ta có

$$|A_1 \cap A_i| = 1, \quad \forall i = 2, 3, \ldots, n.$$

Mà tập A_1 có k phần tử nên, theo nguyên lý Dirichlet, phải tồn tại phần tử $a \in A_1$ là phần tử chung của ít nhất m tập trong số các tập $A_2, \ldots, A_n$, với

$$m \geqslant \frac{n-1}{k} > k-1. \tag{2}$$

Nếu $m < n-1$ thì sẽ tồn tại A_j mà $a \notin A_j$. Khi đó, từ (1) và (2) suy ra $|A_j| \geqslant m+1 > k$. Điều vừa nhận được cho thấy $m = n-1$, và vì thế

$$\left|\bigcap_{i=1}^n A_i\right| = 1.$$

Từ đây dễ thấy $\left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| = n(k-1)+1$. □

Bài toán 11. *Hỏi từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 ta có thể lập được tất cả bao nhiêu số có 15 chữ số mà trong mỗi số, mỗi chữ số đều có mặt đúng 3 lần và không có chữ số nào chiếm 3 vị trí liên tiếp trong số?*

Lời giải. Gọi A^* là tập gồm tất cả các số thỏa mãn yêu cầu đề bài, và gọi A là tập gồm tất cả các số có 15 chữ số được lập nên bởi các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 mà mỗi chữ số đều có mặt đúng 3 lần trong số. Dễ thấy

$$A^* = A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right), \tag{1}$$

trong đó A_i là tập gồm tất cả các số thuộc A mà trong mỗi số, chữ số i chiếm đúng 3 vị trí liên tiếp, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Xét $1 \leqslant k \leqslant 5$. Dễ dàng chứng minh được rằng

$$\left|\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right| = \frac{(15-2k)!}{3^{5-k}}.$$

Do đó từ (1), theo hệ quả 1, tính chất 4 và kết quả bài toán 5, suy ra

$$|A^*| = \frac{15!}{3^5} - C_5^1 \cdot \frac{13!}{3^4} + C_5^2 \cdot \frac{11!}{3^3} - C_5^3 \cdot \frac{9!}{3^2} + C_5^4 \cdot \frac{7!}{3^1} - C_5^5 \cdot \frac{5!}{3^0} = 2858830680.$$

Bài toán được giải quyết xong. □

Bài toán 12. *Cho $k, n \in \mathbb{N}^*$ và $1 < k \leqslant n$. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn ra k số đôi một khác nhau từ n số nguyên dương đầu tiên sao cho trong mỗi bộ k số được chọn ra, không có hai số nào là hai số nguyên liên tiếp?*

Lời giải. Gọi m là số cần tìm. Ta có $m = |A|$, với A là tập gồm tất cả các bộ không có thứ tự $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ thỏa mãn $a_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, k$ và $|a_i - a_j| \notin \{0, 1\}$ với mọi $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Không mất tính tổng quát, với mỗi $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in A$, ta có thể giả sử $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$. Xét tương ứng

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in A \mapsto (a_1, a_2 - 1, \ldots, a_k - k + 1).$$

Dễ thấy, tương ứng nói trên xác lập một song ánh từ A đến B, với B là tập gồm tất cả các bộ $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ không có thứ tự thỏa mãn $b_i \in \{1, 2, \ldots, n-k+1\}$, $\forall i = 1, 2 \ldots, k$ và $b_i \neq b_j$, $\forall i \neq j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Từ đây suy ra $A \sim B$, và như vậy ta có $|A| = |B| = C_{n-k+1}^k$ (theo kết quả bài toán 3). □

Bài toán 13. *Cho các số nguyên dương n, k, m thỏa mãn điều kiện $1 < k \leqslant n$. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn ra k số phân biệt $a_1, a_2, \ldots, a_k$ từ n số nguyên dương đầu tiên sao cho*

$$|a_i - a_j| > m, \quad \forall i \neq j \in \{1, 2, \ldots, k\}?$$

Lời giải. Bằng phương pháp đã sử dụng để giải bài toán 12, ta dễ dàng chứng minh được số cần tìm bằng $C_{n-(k-1)m}^k$. □

Bài toán 14. *Cho $n, k, m \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện $m > 1$ và $1 < k \leqslant n$. Hỏi có tất cả bao nhiêu chỉnh hợp chập k $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ của n số nguyên dương đầu tiên mà mỗi chỉnh hợp $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ đều thỏa mãn ít nhất một trong hai điều kiện: hoặc tồn tại hai số $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ sao cho $i < j$ và $a_i > a_j$, hoặc tồn tại $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ sao cho $a_i - i$ không chia hết cho m?*

Lời giải. Gọi A là tập gồm tất cả các chỉnh hợp chập k của n số nguyên dương đầu tiên. Gọi A^* là tập gồm tất cả các chỉnh hợp thỏa mãn yêu cầu đề bài, và gọi B là tập gồm tất cả các chỉnh hợp không thỏa mãn yêu cầu đề bài. Hiển nhiên ta có

$$A^* = A \setminus B. \tag{1}$$

Xét tập B. Ta có

$$B = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in A \,|\, a_1 < a_2 < \cdots < a_k;\ a_i - i \,\vdots\, m,\ \forall i \in \{1, 2 \ldots, k\}\}.$$

Xét tương ứng

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in B \mapsto (a_1 + (m-1),\ a_2 + 2(m-1),\ \ldots,\ a_k + k(m-1)).$$

Dễ dàng chứng minh được tương ứng nói trên xác lập một song ánh từ B đến B_1, trong đó B_1 là tập gồm tất cả các bộ không có thứ tự $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ thỏa mãn $b_i \in \{1, 2, \ldots, n+k(m-1)\}$ và $b_i \,\vdots\, m$, $\forall i \in \{1, 2 \ldots, k\}$. Từ đó suy ra

$$B \sim B_1.$$

Mặt khác, theo kết quả bài toán 6 và bài toán 3 thì

$$|B_1| = C^k_{\lfloor \frac{n-k}{m} \rfloor + k}.$$

Vì vậy, từ (1), theo hệ quả 1 và bài toán 2, ta được $|A^*| = n(n-1)\cdots(n-k+1) - C^k_{\lfloor \frac{n-k}{m} \rfloor + k}$. □

Chú ý. Trong bài toán trên, khi cho $m = 2$ ta sẽ có bài 3 của đề thi Quốc gia chọn học sinh giỏi Toán THPT năm 1996 (bảng A).

Bài toán 15. *Cho các số $k, n \in \mathbb{N}^*$ và $1 < k < n$, $n > 3$. Cho đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_n$. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách tô màu k đỉnh của đa giác đó sao cho trong mỗi cách tô không có hai đỉnh kề nhau nào cùng được tô màu?*

Lời giải. Gọi T là tập gồm tất cả các cách tô màu thỏa mãn yêu cầu đề bài. Gọi T_1 là tập gồm tất cả các cách tô màu thuộc T mà trong mỗi cách tô, ta đều thấy đỉnh A_1 không được tô màu. Đặt $T_2 = T \setminus T_1$. Hiển nhiên $T = T_1 \cup T_2$ và $T_1 \cap T_2 = \varnothing$. Từ đó, theo tính chất 1 và dựa vào kết quả bài toán 12, ta dễ dàng chứng minh được $|T| = \frac{n}{n-k} C^k_{n-k}$. □

6 Các bài tập đề nghị

Bài tập 1. Trong một kỳ thi tuyển sinh vào một trường Đại học có 48 thí sinh được 10 điểm Toán, 37 thí sinh được 10 điểm Lý, 42 thí sinh được 10 điểm Hóa, 75 thí sinh được 10 điểm Toán hoặc Lý, 76 thí sinh được 10 điểm Toán hoặc Hóa, 66 thí sinh được 10 điểm Lý hoặc Hóa, và có 4 thí sinh được 10 điểm cả ba môn. Hỏi có bao nhiêu thí sinh được ít nhất một điểm 10 và bao nhiêu thí sinh chỉ được đúng một điểm 10?

Bài tập 2. Một lớp học có 40 học sinh. Biết rằng trong lớp có 25 học sinh giỏi Toán, 22 học sinh giỏi Văn, 22 học sinh giỏi Lý, 33 học sinh giỏi Toán hoặc Văn, 32 học sinh giỏi Toán hoặc Lý, 31 học sinh giỏi Văn hoặc Lý, và 10 học sinh giỏi cả ba môn. Hỏi có bao nhiêu học sinh chỉ giỏi một môn và bao nhiêu học sinh không giỏi môn nào?

Bài tập 3. Cho tập $T = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 1 \leqslant n \leqslant 10^4;\ 2^n - n^2 \,\vdots\, 7\}$. Hãy tìm $|T|$.

Bài tập 4. Cho T là tập gồm tất cả các bộ số nguyên (x, y) không có thứ tự thỏa mãn $0 < x, y < 10^6$ và $x^2 + y^2 \,\vdots\, 49$. Hãy tìm $|T|$.

Bài tập 5. Cho số nguyên $n \geqslant 4$ và n đoạn thẳng lần lượt có độ dài $1, 2, \ldots, n$. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách lấy ra bốn đoạn thẳng phân biệt từ n đoạn thẳng đó sao cho mỗi bộ 4 đoạn thẳng được lấy ra là độ dài của 4 cạnh của một tứ giác ngoại tiếp? Kết quả của bài toán sẽ thay đổi như thế nào nếu 4 đoạn thẳng lấy ra không bắt buộc phải đôi một khác nhau?

Bài tập 6. Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Gọi T là tập gồm tất cả các bộ không có thứ tự (a, b, c, d) thỏa mãn $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ và $a + b + c + d = 24n + 11$. Hãy tìm $|T|$.

HÀM ĐẶC TRƯNG CỦA TẬP HỢP VÀ ỨNG DỤNG

Trần Nam Dũng[1,2]

1 Mở đầu

Hàm đặc trưng là một khái niệm quan trọng của Toán học với nhiều ứng dụng trong lý thuyết Tập hợp, lý thuyết Nhóm, lý thuyết Độ đo và Tích phân, lý thuyết Xác suất. Trong bài viết này, chúng ta đề cập đến hàm đặc trưng của tập hợp và những ứng dụng của nó trong lý thuyết Tập hợp và các bài toán đếm. Cách tiếp cận hàm đặc trưng sẽ giúp học sinh làm việc dễ dàng hơn với các bài toán về tập hợp và giúp chúng ta giải thích một cách dễ hiểu phương pháp đếm theo phần tử – một kỹ thuật đếm hiệu quả.

2 Định nghĩa và các tính chất cơ bản

Ta xét một tập hợp E và tập hợp tất cả các tập con của E (ký hiệu là $P(E)$, hay 2^E). Tập hợp E được gọi là tập hợp vũ trụ, chứa tất cả các tập hợp mà ta quan tâm đến. Chú ý là E và $\varnothing$ cũng là tập con của E, tức là phần tử của $P(E)$.

Định nghĩa 1. *Với mỗi tập con A của E, hàm đặc trưng χ_A (đọc là chi-A) của A là hàm số xác định trên E và nhận giá trị trong $\{0, 1\}$, được xác định như sau:*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in A \\ 0 & \text{nếu } x \notin A \end{cases}$$

Như vậy, hàm đặc trưng chỉ nhận giá trị 0 hoặc 1, và $\chi_A(x)$ nhận giá trị 1 khi và chỉ khi x thuộc A. Vì thế hàm đặc trưng của tập hợp còn được gọi là *hàm thuộc* hay *hàm chỉ*.

Một tập hợp sẽ hoàn toàn được xác định nếu ta biết hàm đặc trưng của nó. Hai tập hợp bằng nhau khi và chỉ khi hai hàm đặc trưng của nó bằng nhau (tức là chúng bằng nhau tại mọi điểm x thuộc E). Đây chính là cơ sở để ta vận dụng hàm đặc trưng trong việc chứng minh các tính chất liên quan đến các phép toán trên tập hợp. Trước hết, ta có các định nghĩa cơ bản sau:

Định nghĩa 2. *Xét hai hàm số χ_1 và χ_2 xác định trên E và nhận giá trị trong $\mathbb{R}$. Ta viết:*

(i) $\chi_1 = \chi_2$ *khi và chỉ khi* $\chi_1(x) = \chi_2(x)$, $\forall x \in E$;

(ii) $\chi_1 \leqslant \chi_2$ *khi và chỉ khi* $\chi_1(x) \leqslant \chi_2(x)$, $\forall x \in E$;

(iii) $\chi_1 + \chi_2$ *là một hàm số từ E vào $\mathbb{R}$, xác định bởi* $(\chi_1 + \chi_2)(x) = \chi_1(x) + \chi_2(x)$;

(iv) $\chi_1\chi_2$ *là một hàm số từ E vào $\mathbb{R}$, xác định bởi* $(\chi_1\chi_2)(x) = \chi_1(x)\chi_2(x)$.

[1]Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh.
[2]Trích bài giảng tại hội thảo "Bồi dưỡng phát triển chuyên môn giáo viên THPT chuyên", Bắc Ninh, 07/2011.

Ngoài ra, ta cũng sẽ sử dụng 0 và 1 để ký hiệu các hàm đồng nhất 0 trên E và đồng nhất 1 trên E (nói cách khác $0 = \chi_\varnothing, 1 = \chi_E$).

Các tính chất cơ bản của hàm đặc trưng được tóm tắt trong định lý sau:

Định lý 1. *Nếu A, B là các tập con bất kỳ của tập vũ trụ E thì ta có*

(1) $(\chi_A)^2 = \chi_A$;

(2) $\chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A$;

(3) $\chi_{A\cap B} = \chi_A\chi_B$;

(4) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B$;

(5) $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_A\chi_B$;

(6) $\chi_{A\triangle B} = \chi_A + \chi_B \mod 2$.

Phép chứng minh định lý sử dụng định nghĩa của hàm đặc trưng, cũng như định nghĩa các phép toán trên tập hợp. Ở đây chú ý là ta chọn tập ảnh của hàm đặc trưng là $\{0, 1\}$ có một thuận lợi là $0^2 = 0$ và $1^2 = 1$ do đó mà có tính chất (1). Cuối cùng, cũng cần nhắc lại là ký hiệu $A\triangle B$ biểu thị cho hiệu đối xứng của hai tập hợp, tức là tập các phần tử thuộc đúng vào một trong hai tập hợp:

$$A\triangle B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A) = (A\cup B)\setminus(A\cap B).$$

3 Ứng dụng hàm đặc trưng để chứng minh các đẳng thức, bao hàm thức về tập hợp

Với các tính chất cơ bản đã nêu ở phần 2, hàm đặc trưng có thể được sử dụng một cách hiệu quả để chứng minh các đẳng thức tập hợp. Chúng ta bắt đầu bằng các ví dụ đơn giản sau:

Ví dụ 1 (Quy tắc De Morgan). *Nếu A, B là các tập con bất kỳ thuộc E thì ta có*

(a) $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$;

(b) $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$.

Chứng minh. **(a)** Ta có

$$\chi_{\overline{A\cup B}} = 1 - \chi_{A\cup B} = 1 - (\chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B) = (1-\chi_A)(1-\chi_B) = \chi_{\overline{A}}\chi_{\overline{B}} = \chi_{\overline{A}\cap\overline{B}}.$$

Từ đó suy ra

$$\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}.$$

(b) Sử dụng các tính chất cơ bản của hàm đặc trưng, ta có

$$\chi_{\overline{A\cap B}} = 1 - \chi_{A\cap B} = 1 - \chi_A\chi_B.$$

Mặt khác, lại thấy

$$\chi_{\overline{A}\cup\overline{B}} = \chi_{\overline{A}} + \chi_{\overline{B}} - \chi_{\overline{A}}\chi_{\overline{B}} = 1 - \chi_A + 1 - \chi_B - (1-\chi_A)(1-\chi_B) = 1 - \chi_A\chi_B,$$

nên ta suy ra hàm đặc trưng của $\overline{A\cap B}$ và $\overline{A}\cup\overline{B}$ bằng nhau, do đó chúng bằng nhau. □

Ví dụ 2 (Tính phân phối giữa phép hợp và phép giao). *Nếu A, B, C là các tập con bất kỳ thuộc E thì ta có*

(a) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

(b) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Chứng minh. Ta chỉ chứng minh phần (a), phần (b) có thể chứng minh tương tự. Ta có

$$\chi_{(A\cup B)\cap C} = \chi_{A\cup B}\chi_C = (\chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B)\chi_C.$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned}\chi_{(A\cap C)\cup(B\cap C)} &= \chi_{A\cap C} + \chi_{B\cap C} - \chi_{A\cap C}\chi_{B\cap C} = \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C - \chi_A\chi_C\chi_B\chi_C \\ &= \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C - \chi_A\chi_B\chi_C = (\chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B)\chi_C.\end{aligned}$$

Hai hàm đặc trưng bằng nhau do đó hai tập hợp ở hai vế bằng nhau. □

Bài tập 1.

1. Chứng minh rằng phép hiệu đối xứng có tính kết hợp, tức là với mọi tập hợp A, B, C,

$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

2. Chứng minh rằng nếu $A \cap B = A \cap C$ và $A \cup B = A \cup C$ thì $B = C$.

3. Chứng minh nếu A, B, C là các tập con bất kỳ của E thì ta có

   (a) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$;

   (b) $(A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = (A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$.

Hàm đặc trưng còn có thể làm việc hiệu quả với các bao hàm thức, với chú ý là $A \subset B$ khi và chỉ khi $\chi_A \leqslant \chi_B$. Sau đây là một số ví dụ:

Ví dụ 3. *Chứng minh rằng nếu $A \cap C \subset B \cap C$ và $A \setminus C \subset B \setminus C$ thì $A \subset B$.*

Chứng minh. Từ giả thiết ta suy ra

$$\chi_A\chi_C \leqslant \chi_B\chi_C$$

và

$$\chi_A - \chi_A\chi_C \leqslant \chi_B - \chi_B\chi_C.$$

Cộng các bất đẳng thức vế theo vế, ta được $\chi_A \leqslant \chi_B$, tức là $A \subset B$. □

Ví dụ 4. *Chứng minh rằng nếu $A \cap B = C \cap D$, $C \cup D = E$, $C \subset A$ và $D \subset B$ thì*

$$C = A, \quad D = B.$$

Chứng minh. Theo giả thiết ta có

(1) $\chi_A\chi_B = \chi_C\chi_D$;

(2) $\chi_C + \chi_D - \chi_C\chi_D = 1$;

(3) $\chi_C \leqslant \chi_A$, $\chi_D \leqslant \chi_B$.

Ta cần chứng minh các bất đẳng thức ở (3) phải là các đẳng thức. Giả sử ngược lại, tồn tại một điểm x mà ở đó một trong hai bất đẳng thức ở (3) là bất đẳng thức thực sự. Không mất tính tổng quát, giả sử $\chi_C(x) < \chi_A(x)$. Khi đó

$$\chi_C(x) = 0, \quad \chi_A(x) = 1.$$

Lúc này, do (1) nên $\chi_B(x) = 0$. Từ kết quả này và bất đẳng thức $\chi_D \leqslant \chi_B$, ta suy ra $\chi_D(x) = 0$. Nhưng điều này mâu thuẫn với (2). □

Bài tập 2. Cho E là một tập hợp và $X, Y, Z, X', Y', Z' \in P(E)$. Giả sử

$$X \cup Y \cup Z = E, \quad X \cap Y = X' \cap Y', \quad X \cap Z = X' \cap Z', \quad Y \cap Z = Y' \cap Z'$$

và

$$X \subset X', \quad Y \subset Y', \quad Z \subset Z'.$$

Chứng minh rằng $X = X'$, $Y = Y'$, $Z = Z'$.

4 Ứng dụng hàm đặc trưng trong các bài toán đếm

Một trong những ứng dụng đẹp đẽ và có chiều sâu nhất của hàm đặc trưng là ứng dụng trong các bài toán đếm. Và cơ sở của ứng dụng này là công thức hiển nhiên sau:

$$|A| = \sum_{x \in E} \chi_A(x). \tag{1}$$

Trước hết, ta sẽ sử dụng công thức này để chứng minh lại các nguyên lý cơ bản của phép đếm.

Định lý 2. *Cho hai tập hợp A và B. Khi đó ta có*

(1) (Nguyên lý cộng) *Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì $|A \cup B| = |A| + |B|$.*

(2) (Nguyên lý nhân) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

(3) (Nguyên lý trừ) $|\overline{A}| = |E| - |A|$.

(4) (Nguyên lý bù trừ) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Chứng minh. Rõ ràng nguyên lý cộng và nguyên lý trừ là hệ quả của nguyên lý bù trừ, do đó ta chỉ cần chứng minh nguyên lý bù trừ là suy ra hai nguyên lý còn lại. Ta có

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}.$$

Từ đó suy ra

$$\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x).$$

Cho x chạy qua khắp E rồi cộng lại, ta được

$$\sum_{x \in E} \chi_{A \cup B}(x) = \sum_{x \in E} \chi_A(x) + \sum_{x \in E} \chi_B(x) - \sum_{x \in E} \chi_{A \cap B}(x)$$

Nhưng điều này, theo công thức cơ bản ở trên, có nghĩa là $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Nguyên lý bù trừ được chứng minh.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh nguyên lý nhân. Theo định nghĩa thì $\chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x)\chi_B(y)$. Từ đây, ta có

$$|A \times B| = \sum_{(x,y) \in E \times F} \chi_{A \times B}(x, y) = \sum_{(x,y) \in E \times F} \chi_A(x)\chi_B(y) = \sum_{x \in E} \chi_A(x) \sum_{y \in B} \chi_B(y) = |A| \cdot |B|.$$

Như vậy quy tắc nhân đã được chứng minh. □

Bài tập 3.

1. Cho A, B, C là các tập hợp bất kỳ. Chứng minh rằng

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - \big(|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|\big) + |A \cap B \cap C|.$$

2. Chứng minh công thức bao hàm và loại trừ (nguyên lý bù trừ) tổng quát:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Tiếp theo, ta sẽ ứng dụng công thức (1) để giải thích phương pháp đếm theo phần tử. Ta minh họa phương pháp này qua bài toán sau.

Ví dụ 5. *Cho* $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ *và* $F = P(E)$. *Hãy tính*

$$S = \sum_{(A,B) \in F^2} |A \cap B|.$$

Lời giải. Bài này có thể giải bằng hai cách, cách 1 là đếm theo tập hợp và cách 2 là đếm theo phần tử. Với cách 1, ta gọi $s(k)$ là số tất cả các bộ $(A, B) \in F^2$ sao cho

$$|A \cap B| = k.$$

Thế thì rõ ràng

$$S = \sum_{k=0}^{n} k \cdot s(k).$$

Như vậy ta chỉ cần đi tìm $s(k)$. Với mỗi k cố định, có C_n^k cách chọn ra một tập con gồm k phần tử. Giả sử đó là C. Nếu ta cho $A \cap B = C$ thì $|A \cap B| = k$. Để đảm bảo điều này, sau đó mỗi phần tử thuộc $E \setminus C$ có thể:

(a) Không thuộc A, không thuộc B;

(b) Thuộc A, không thuộc B;

(c) Thuộc B, không thuộc A.

Tức là có 3 cách chọn. Từ đó suy ra

$$s(k) = C_n^k 3^{n-k}.$$

Cuối cùng, ta được $S = \sum_{k=0}^{n} k \cdot s(k) = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k 3^{n-k} = n \cdot 4^{n-1}$ (tại sao?).

Lời giải trên là khá phức tạp, bao gồm 2 bước lý luận khó:

(1) Tính được $s(k)$;

(2) Rút gọn tổng $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k 3^{n-k}$.

Tuy nhiên, đáp số bài toán lại khá đơn giản: $n \cdot 4^{n-1}$. Ta thử tìm một cách tiếp cận khác cho ra thẳng đáp số này. Và thừa số n ở đáp số gợi cho chúng ta đến phương pháp đếm theo phần tử, tức là đếm số lần một phần tử x xuất hiện trong các tập hợp $A \cap B$. Cụ thể ta có

$$S = \sum_{(A,\, B)\in F^2} |A \cap B| = \sum_{(A,\, B)\in F^2} \sum_{x\in E} \chi_{A\cap B}(x) = \sum_{x\in E} \sum_{(A,\, B)\in F^2} \chi_{A\cap B}(x),$$

ở đây ta đã đảo thứ tự lấy tổng.

Với một phần tử $x \in E = \{1, 2, \ldots, n\}$ cố định, xét tổng $\sum_{(A,\, B)\in F^2} \chi_{A\cap B}(x)$. Ta thấy $\chi_{A\cap B}(x) = 1$ khi và chỉ khi $A \cap B$ chứa x. Như vậy

$$\sum_{(A,\, B)\in F^2} \chi_{A\cap B}(x) = \left|\{(A,\, B) \in F^2 \,|\, x \in A \cap B\}\right|,$$

tức là tổng trên bằng số bộ $(A,\, B)$ sao cho cả A và B đều chứa x. Có 2^{n-1} tập con của E chứa x. Do đó, theo quy tắc nhân, số bộ $(A,\, B)$ để $A \cap B$ chứa x bằng $2^{n-1} \cdot 2^{n-1} = 4^{n-1}$. Từ đó

$$S = \sum_{x\in E} \sum_{(A,\, B)\in F^2} \chi_{A\cap B}(x) = \sum_{x\in E} 4^{n-1} = n \cdot 4^{n-1}. \qquad \square$$

Nhận xét. Từ kết quả bài toán này ta suy ra kết luận sau: *Nếu lấy ngẫu nhiên hai tập con A, B thuộc $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ thì giá trị kỳ vọng của $|A \cap B|$ là $\frac{n}{4}$.*

Ví dụ 6 (APMO, 1998). *Xét tập hợp $E = \{1, 2, \ldots, 1998\}$ và F là tập hợp tất cả các tập con của E. Hãy tính tổng*

$$S = \sum_{(A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_n)\in F^n} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|.$$

Lời giải. Nếu giải bài này bằng phương pháp đếm theo tập hợp sẽ gặp khá nhiều khó khăn. Tuy nhiên, phương pháp đếm theo phần tử cho ta kết quả một cách nhanh chóng

$$\begin{aligned}\sum_{(A_1, A_2, \ldots, A_n)\in F^n} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| &= \sum_{(A_1, A_2, \ldots, A_n)\in F^n} \sum_{x\in E} \chi_{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}(x)\\ &= \sum_{x\in E} \sum_{(A_1, A_2, \ldots, A_n)\in F^n} \chi_{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}(x).\end{aligned}$$

Tổng bên trong đúng bằng số các bộ $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ mà $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ chứa x. Ta có tổng số các bộ $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ bằng $(2^{1998})^n$ (2^{1998} là số các tập con của E). Tổng số các bộ $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ mà $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ không chứa x bằng $(2^{1997})^n$ (2^{1997} là số các tập con của E không chứa x). Suy ra, số các bộ $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ mà $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ chứa x là

$$(2^{1998})^n - (2^{1997})^n.$$

Từ đây, ta tính được $S = 1998\left[(2^{1998})^n - (2^{1997})^n\right] = 1998(2^n - 1)2^{1997n}$. $\square$

Bài tập 4.

1. Cho $E = \{1, 2, \ldots, n\}$. Với mỗi $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, đặt $F_k = \{A \subset E \,|\, |A| = k\}$ (tức là tập hợp tất cả các tập con có k phần tử của E). Hãy tính tổng $\sum_{(A,\, B)\in F_p\times F_q} |A \cap B|$.

2. (Việt Nam, 2002) Cho tập hợp S gồm tất cả các số nguyên trong đoạn $[1, 2002]$. Gọi T là tập hợp tất cả các tập hợp con không rỗng của S. Với mỗi tập con X thuộc T, ký hiệu $m(X)$ là trung bình cộng của tất cả các số thuộc X. Đặt $m = \frac{1}{|T|}\sum m(X)$, ở đây tổng lấy theo tất cả các tập hợp X thuộc T. Hãy tính giá trị của m.

5 Các ứng dụng khác của phương pháp đếm theo phần tử

Phương pháp đếm theo phần tử được trình bày ở mục 4 có thể được tổng quát hóa như sau: Cho F là họ các tập con của X. Với x thuộc X, ta gọi $d(x)$ là số phần tử của F chứa x.

Định lý 3. *Cho F là họ các tập con của tập hợp X. Khi đó*

$$\sum_{x\in X} d(x) = \sum_{A\in F} |A|.$$

Chứng minh. Xét *ma trận kề* $M = (m_{x,A})$ của F, nghĩa là M là ma trận $0-1$ với $|X|$ dòng đánh số bởi các điểm $x \in X$ và $|F|$ cột đánh số bởi tập $A \in F$ sao cho $m_{x,A} = 1$ khi và chỉ khi $x \in A$. Để ý rằng $d(x)$ bằng số số 1 trên dòng thứ x còn $|A|$ là số số 1 trên cột thứ A. Như vậy cả vế trái và vế phải đều biểu diễn số số 1 của M. □

Nếu ta xét đồ thị $G = (V, E)$ trên tập đỉnh V như một họ các tập con 2 phần tử của V thì ta có định lý Euler.

Định lý 4 (Euler). *Trong mọi đồ thị, tổng bậc các đỉnh của nó bằng hai lần số cạnh của nó và như thế, luôn là một số chẵn.*

Định lý sau có thể được chứng minh bằng cách tương tự:

Định lý 5. *Với mọi $Y \subseteq X$, ta có*

(a) $\displaystyle\sum_{x\in Y} d(x) = \sum_{A\in F} |Y \cap A|$;

(b) $\displaystyle\sum_{x\in Y} d(x)^2 = \sum_{A\in F}\sum_{x\in A} d(x) = \sum_{A\in F}\sum_{B\in F} |A \cap B|$.

(*Hai tổng ở đẳng thức đầu ứng với số số 1 trên các hàng Y. Các tổng ở đẳng thức thứ hai đếm số lần xuất hiện của x trong các tập có dạng $A \cap B$*).

Trường hợp đặc biệt khi $F = E$ là tập con 2 phần tử, ta có

Định lý 6. *Với đồ thị $G = (V, E)$, ta có*

$$\sum_{x\in V} d(x)^2 = \sum_{x,y\in E} \big[d(x) + d(y)\big].$$

Định lý sau đây của hình học tổ hợp có nhiều ứng dụng hiệu quả trong các bài toán đánh giá diện tích và được chứng minh dựa trên ý tưởng của công thức bao hàm và loại trừ, cũng như phương pháp đếm theo phần tử (dù ở đây chúng ta không làm việc với tập hợp hữu hạn).

Định lý 7. *Trên mặt phẳng cho n hình. Gọi $S_{i_1\ldots i_k}$ là diện tích phần giao của các hình với chỉ số $i_1, \ldots, i_k$. S là diện tích phần mặt phẳng được phủ bởi các hình trên, M_k là tổng tất cả các $S_{i_1\ldots i_k}$. Khi đó ta có*

(a) $S = M_1 - M_2 + \cdots + (-1)^{n+1}M_n$;

(b) $S \geqslant \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}M_i$ *khi m chẵn và* $S \leqslant \sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}M_i$ *khi m lẻ.*

Chứng minh. **(a)** Gọi W_m là diện tích phần mặt phẳng được phủ bởi đúng m hình. Phần mặt phẳng này tạo thành từ các mẩu, mỗi một mẩu được phủ bởi m hình xác định nào đó. Diện tích mỗi một mẩu như vậy khi tính M_k được tính C_m^k lần, vì từ m hình có thể thiết lập được C_m^k phần giao của k hình. Vì vậy

$$M_k = C_k^k W_k + C_k + 1^k W_{k+1} + \cdots + C_n^k W_n.$$

Từ đây, ta suy ra

$$\begin{aligned} M_1 - M_2 + \cdots + (-1)^{n+1} M_n &= C_1^1 W_1 + (C_2^1 - C_2^2) W_2 + \cdots + (C_n^1 - C_n^2 + C_n^3 - \cdots) W_n \\ &= W_1 + W_2 + \cdots + W_n, \end{aligned}$$

vì $C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - \cdots - (-1)^m C_m^m = (-1 + C_m^1 - C_m^2 + \cdots) + 1 = -(1-1)^m + 1 = 1$.

Cuối cùng, với chú ý rằng $S = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$, ta thu được điều phải chứng minh.

(b) Chứng minh phần này xin được dành cho bạn đọc. □

Ta xem xét một ứng dụng trực tiếp của định lý 7.

Ví dụ 7.

(*a*) *Trong hình vuông diện tích* 6 *có* 3 *hình đa giác có diện tích mỗi hình bằng* 3. *Chứng minh rằng trong chúng tồn tại* 2 *hình đa giác có diện tích phần chung không nhỏ hơn* 1.

(*b*) *Trong hình vuông diện tích* 5 *có* 9 *hình đa giác có diện tích mỗi hình bằng* 1. *Chứng minh rằng trong chúng tồn tại* 2 *đa giác có diện tích phần chung không nhỏ hơn* $\frac{1}{9}$.

Chứng minh. **(a)** Theo định lý 7, phần (a) thì ta có

$$6 = 9 - (S_{12} + S_{23} + S_{13}) + S_{123}.$$

Từ đó suy ra

$$S_{12} + S_{23} + S_{13} = 3 + S_{123} \geqslant 3.$$

Điều này chứng tỏ một trong các số S_{12}, S_{23}, S_{13} có giá trị không nhỏ hơn 1.

(b) Theo định lý 7, phần (b) thì $5 \geqslant 9 - M_2$, tức là

$$M_2 \geqslant 4.$$

Vì từ 9 hình đa giác có thể tạo ra $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ cặp, nên diện tích phần trong của một trong các cặp như vậy không nhỏ hơn $\frac{M_2}{36} \geqslant \frac{1}{9}$. □

Bài tập 5.

1. Trong hình chữ nhật diện tích 1 có 5 hình có diện tích mỗi hình bằng $\frac{1}{2}$.

   (a) Chứng minh rằng tồn tại hai hình có diện tích phần chung không nhỏ hơn $\frac{3}{20}$;

   (b) Chứng minh rằng tồn tại hai hình có diện tích phần chung không nhỏ hơn $\frac{1}{5}$;

   (c) Chứng minh rằng tồn tại ba hình có diện tích phần chung không nhỏ hơn $\frac{1}{20}$.

2. (Nga, 1996) Trong Duma có 1600 đại biểu, tạo thành 16000 ủy ban, mỗi ủy ban có 80 người. Chứng minh rằng tồn tại hai ủy ban có chung ít nhất 4 thành viên.

Tài liệu tham khảo

[1] Đoàn Quỳnh (chủ biên), Doãn Minh Cường, Trần Nam Dũng, Đặng Hùng Thắng, *Tài liệu giáo khoa chuyên Toán*, Đại số 10, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2009.

[2] Nguyễn Hữu Anh, *Toán rời rạc*, Nhà xuất bản Giáo dục, 1999.

[3] Jean-Marie Monier, *Giáo trình Toán*, Tập 5, Đại số 1, Nhà xuất bản Giáo dục, 1999.

[4] Trần Nam Dũng, *Kỹ thuật đếm bằng hai cách ứng dụng trong giải Toán*, Kỷ yếu Hội nghị Khoa học, Các chuyên đề chuyên Toán – Bồi dưỡng học sinh giỏi THPT, Nam Định, tháng 11/2010.

[5] Alfutova N. B., Ustinov A. V., *Đại số và Lý thuyết số*, Nhà xuất bản MCCME, 2002.

[6] Prasolov V. V., *Các bài toán Hình học*, Nhà xuất bản MCCME, 2001.

NHẬP MÔN LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

Nguyễn Chu Gia Vượng[1]

1 Khái niệm cơ bản

1.1 Định nghĩa đầu tiên

Trước hết, ta đưa ra một vài ví dụ đầu tiên nhằm minh họa cho các khái niệm về đồ thị.

Ví dụ 1. *Trong một nhóm $n \geqslant 3$ người, mỗi người quen biết với ít nhất 2 người khác. Chứng minh rằng có thể tìm thấy $k \geqslant 3$ người $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sao cho với mỗi $1 \leqslant i \leqslant k$, A_i quen với A_{i-1} và A_{i+1}.*

Ví dụ 2. *Trong một cuộc gặp mặt n người, mỗi người là bạn là bạn của ít nhất một người khác. Biết rằng trong mỗi nhóm ba người bất kỳ không có chính xác hai cặp người bạn. Chứng minh rằng mọi người đều là bạn của nhau.*

Ví dụ 3. *Trong một thị trấn có ba ngôi nhà A, B, C và ba nhà máy điện, nước và khí đốt. Mỗi ngôi nhà cần phải được nối với mỗi nhà máy trên bởi một đường dẫn. Hỏi có thể thực hiện được các đường ống sao cho hai đường ống đôi một không giao nhau hay không?*

Với các tình huống như trên, ý tưởng tự nhiên là thực hiện một hình vẽ: chẳng hạn, với hai ví dụ đầu, ta tượng trưng cho mỗi người là một điểm trong mặt phẳng, hai người quen biết nhau được mô hình hóa bằng một đường nối hai điểm tượng trưng cho hai người đó. Với ví dụ còn lại, mỗi ngôi nhà được mô hình hóa bằng một điểm, mỗi nhà máy là một điểm, các đường ống nối các ngôi nhà với các nhà máy được mô hình hóa bằng các đường nối giữa các điểm.

Các tình huống như vậy dẫn đến khái niệm tổng quát sau.

Định nghĩa 1. *Một đồ thị $G = (V, E)$ là một cặp được tạo thành từ một tập đỉnh V, trong đó $E \subset V \times V$ gọi là tập các cạnh.*

Với A, B là hai đỉnh, ta gọi (A, B) là cạnh nối A và B nếu $(A, B) \in E$. Khi đó, ta nói A, B là các đầu mút của cạnh (A, B).

Nhận xét.

- Nói chung (A, B) và (B, A) không trùng nhau. Trong trường hợp này, ta nói đồ thị là có hướng. Ngược lại, nếu ta không bao giờ phân biệt (A, B) với (B, A) thì ta nói đồ thị là vô hướng và khi đó ta nói A, B là các đỉnh kề nhau.
- Theo định nghĩa mà ta đưa ra, mỗi cặp đỉnh được nối với nhau nhiều nhất bởi một cạnh (và nói chung, *không có khuyên*, nghĩa là không có cạnh nào nối một đỉnh với chính nó), nói cách khác, ta quan tâm đến các đồ thị *đơn*.

[1]Viện Toán học.

- Chúng ta thường miêu tả các đồ thị bằng các hình vẽ: các đỉnh bởi các điểm và các cạnh bởi các đường cong nối các điểm. Nói chung, vị trí tương đối của các điểm cũng như việc các đường cong nối chúng có cắt nhau hay không không có vai trò nào trong bài toán (tuy nhiên, bạn đọc lưu ý trường hợp bài toán đồ thị phẳng). Nói riêng, các giao điểm của các đường cong không tạo thêm đỉnh mới cho đồ thị.

- Chú ý rằng 1 đồ thị có thể được biểu diễn bằng nhiều cách hình học và tô pô khác nhau.

1.2 Bậc

Định nghĩa 2. *Bậc của đỉnh A là số cạnh, ký hiệu* $\deg(A)$, *của đồ thị nhận A làm đầu mút.*

Mệnh đề 1. *Trong mọi đồ thị với $n \geqslant 2$ đỉnh, có ít nhất hai đỉnh có cùng bậc.*

Chứng minh. Do đồ thị là đơn nên bậc của các đỉnh nằm trong tập $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Tuy nhiên không thể có hai đỉnh A, B sao cho $\deg(A) = 0$, $\deg(B) = n-1$ được. Nói cách khác, bậc các đỉnh nằm trong $\{0, 1, \ldots, n-2\}$ hoặc $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Nguyên lý Dirichlet giúp ta kết thúc chứng minh. □

Định lý 1. *Cho một đồ thị $G = (V, E)$. Thế thì*

$$\sum_{A \in V} \deg(A) = 2|E|.$$

Ở đây $|X|$ ký hiệu lực lượng của tập hợp X.

Chứng minh. Theo định nghĩa, mỗi cạnh nối chính xác hai đỉnh của đồ thị, do đó chúng được tính đúng hai lần trong tổng bên trái. □

Nhận xét. Công thức trên cho một hình dung đầu tiên về bậc lớn nhất và bậc nhỏ nhất của một đồ thị nếu biết số đỉnh và số cạnh: bậc nhỏ nhất $\leqslant \frac{2|E|}{|V|} \leqslant$ bậc lớn nhất.

Ví dụ 4. *Trong một cuộc họp n người, mỗi người bắt tay với một số $\geqslant 0$ người khác. Chứng minh rằng số người bắt tay với một số lẻ người khác là chẵn.*

Chứng minh. Rút gọn modulo 2 công thức thiết lập tại định lý ?? ở trên. □

1.3 Đường đi và tính liên thông

Định nghĩa 3. *Cho A, B là hai đỉnh của một đồ thị G. Một đường đi từ A đến B là một dãy các cạnh (A_i, A_{i+1}), $i = 0, \ldots, k-1$ với $A_0 = A$, $A_k = B$. Số các cạnh (ở đây là k) tạo nên đường đi gọi là độ dài của đường đi.*

Một đồ thị được gọi là liên thông nếu với hai đỉnh bất kỳ, ta luôn có một đường đi giữa chúng.

Chú ý. Ta quy ước một cạnh được nối với chính nó bởi một đường đi có độ dài 0.

Cho A là một đỉnh của một đồ thị G. Tập tất cả các đỉnh B sao cho có một đường đi từ A đến B được gọi là *thành phần liên thông* của A, ký hiệu là C_A. Tập các thành phần liên thông rõ ràng tạo nên một phân hoạch của các đỉnh của đồ thị:

- $\bigcup_{A \in V} C_A = V$;

- Với mọi $A, B \in V$, $C_A = C_B$ hoặc $C_A \cap C_B = \varnothing$.

Nói một cách khác, có thể phân chia các đỉnh một đồ thị thành các nhóm đôi một rời nhau (các thành phần liên thông) sao cho hai đỉnh bất kỳ trong một nhóm được nối với nhau bởi các đường đi.

Ta đưa vào một số xây dựng hay sử dụng sau đây: Cho G là một đồ thị.

- Nếu ta chỉ loại bỏ một số cạnh của G (giữ nguyên các đỉnh) hoặc loại bỏ một số đỉnh cũng như tất cả các cạnh với ít nhất một đầu mút nằm trong các đỉnh đó thì ta nhận được một đồ thị mới, gọi là một *đồ thị con* của G.

- Nếu như ta giữ lại một số đỉnh của G và một số cạnh của G nối các đỉnh mà ta giữ lại ta nhận được một *đồ thị cảm sinh* từ G.

- Nếu ta thay thế một số cạnh của G bởi các đường đi bằng cách tạo thêm một số đỉnh mới trung gian (chẳng hạn thay thế (A, B) bởi (A, A_1), (A_1, A_2), ..., A_kB trong đó M_i là các đỉnh được tạo mới) thì ta nhận được một đồ thị mới, gọi là một *chia nhỏ* của G.

  Chú ý rằng, trong một phép chia nhỏ một đồ thị, ta không được quyền tạo thêm một đỉnh mới mà đỉnh đó đồng thời là đầu mút của hai cạnh.

Nhận xét rằng để một đồ thị là liên thông, không thể có quá ít cạnh.

Mệnh đề 2. *Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị liên thông. Thế thì*

$$|E| \geqslant |V| - 1.$$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo số đỉnh n của đồ thị. Trường hợp $n = 1, 2$ là tầm thường. Gọi N là một số nguyên và giả sử rằng mọi đồ thị liên thông N đỉnh đều có ít nhất $N - 1$ cạnh. Gọi $G = (V, E)$ là một đồ thị $N + 1$ đỉnh. Lưu ý rằng do G liên thông nên bậc của mỗi đỉnh $\geqslant 1$.

- Nếu bậc của mỗi đỉnh của G đều $\geqslant 2$ thì theo công thức quen thuộc liên kết các bậc và số cạnh, ta có
$$2|E| = \sum_{A \in V} \deg(A) \geqslant 2n,$$
từ đó suy ra $|E| \geqslant n$.

- Giả sử có một đỉnh của G có bậc 1. Gọi A là một đỉnh như vậy và gọi G' là đồ thị được tạo thành từ G bằng cách loại bỏ đỉnh A và cạnh duy nhất của G với một đầu mút A. Dễ thấy G' cũng là một đồ thị liên thông với N đỉnh và $|E| - 1$ cạnh. Áp dụng giả thiết quy nạp cho G' ta có điều cần chứng minh. □

Định nghĩa 4. *Cho G là 1 đồ thị (đơn). Một chu trình là 1 đường đi độ dài $\neq 0$ nối một đỉnh với chính nó, không sử dụng cạnh nào cũng như đỉnh nào (ngoài đỉnh đầu tiên) quá 2 lần. Một chu trình, như vậy, là một đường đi khép kín không sử dụng đỉnh nào quá 2 lần. Ta ký hiệu một chu trình $A_1A_2 \ldots A_kA_1$. Chú ý rằng $k \neq 3$ vì các đồ thị ở đây được giả thiết là đơn.*

Định nghĩa 5. *Một đồ thị liên thông không có chu trình được gọi là một cây.*

Chú ý rằng trong một cây, giữa hai đỉnh bất kỳ tồn tại duy nhất một đường đi: sự tồn tại được bảo đảm bởi tính liên thông, mặt khác, nếu tồn tại hai đường đi phân biệt giữa hai đỉnh thì bằng cách *nối* chúng lại với nhau ta được một chu trình.

Bổ đề 1. *Mọi cây đều có một đỉnh bậc 1 (mỗi đỉnh như vậy được gọi là một lá).*

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh mọi đồ thị liên thông G với bậc mỗi đỉnh $\geqslant 2$ đều có chu trình. Thật vậy, ta đi trên đồ thị, bắt đầu từ một đỉnh bất kỳ, từ đỉnh này sang đỉnh khác sao cho không sử dụng lại cạnh vừa đi. Do số đỉnh là hữu hạn, ta sẽ quay lại đường đã đi. Điều này tạo cho ta một chu trình. □

Hệ quả 1. *Cho G là một đồ thị sao cho mỗi bậc $\geqslant 2$. Thế thì G chứa một chu trình.*

Chứng minh. Hiển nhiên. □

Nhận xét. Mọi cây đều có thể được xây dựng bằng cách bắt đầu từ một đỉnh, mỗi lần thêm vào cây đã có đúng một lá. Thật vậy, mọi cây đều có ít nhất một lá. Ta có thể *hủy* một cây bằng cách lần lượt mỗi lần bỏ một lá khỏi cây. Lật ngược quá trình này ta được xây dựng như mong muốn.

Các cây cũng chính là các đồ thị liên thông có số cạnh nhỏ nhất.

Định lý 2. *Một đồ thị n đỉnh là một cây khi và chỉ khi nó liên thông và có đúng $n-1$ cạnh.*

Chứng minh. Trước hết giả sử rằng G là một đồ thị liên thông, có n đỉnh và $n-1$ cạnh nhưng G có chu trình, chẳng hạn A_1, A_2, ..., A_k, A_1. Nhận xét rằng loại bỏ đi cạnh A_1A_2 đồ thị mới vẫn còn liên thông. Thật vậy, nếu cần đi từ A_1 tới A_2 ta chỉ cần đi *đường vòng* qua $A_1A_kA_{k-1}\dots A_2$. Tuy nhiên, việc đồ thị mới này có n đỉnh, $n-2$ cạnh và liên thông mâu thuẫn với kết quả thiết lập tại mệnh đề ??.

Đảo lại, theo bổ đề ??, mọi cây có ít nhất một lá. Bỏ một lá khỏi cây, hiển nhiên ta có một cây mới với số đỉnh cũng như số cạnh giảm đi một. Bằng suy luận quy nạp theo số đỉnh ta có điều cần chứng minh. □

Ví dụ 5. *Cho G là một cây. Gọi Δ là bậc lớn nhất. Thế thì, G có ít nhất Δ lá.*

Chứng minh. Gọi A là một đỉnh bậc Δ. Với mỗi cây con với gốc là một đỉnh kề với A chọn ra một lá. Các lá này đôi một khác nhau nên số lá của cây ban đầu không ít hơn Δ. □

Ngoài việc các cây là các đồ thị liên thông có số cạnh nhỏ nhất, ta có thể chú ý rằng các cây *sinh ra* tất cả các đồ thị liên thông. Cụ thể hơn,

Mệnh đề 3. *Mọi đồ thị liên thông đều có thể được xây dựng bằng cách thêm vào một số cạnh vào một cây có cùng số đỉnh với đồ thị đã cho, và một cây như vậy được gọi là cây bao trùm của đồ thị.*

Chứng minh. Ta quy nạp theo số *chu trình* c của đồ thị. Nếu $c=0$, đồ thị là một cây và ta không có gì phải chứng minh. Giả sử kết quả cần chứng minh là đúng với $c \geqslant 0$. Giả sử G là một đồ thị có $c+1$ chu trình. Gọi G' là đồ thị cảm sinh từ G bằng cách giữ nguyên các đỉnh và bỏ đi đúng một cạnh thuộc một chu trình nào đó, chẳng hạn cạnh (A_1, A_2) của chu trình A_1, A_2, ..., A_k, A_1. Chú ý rằng mọi chu trình của G' đều là một chu trình của G và do ta đã phá đi ít nhất một chu trình của G, số chu trình của G' vì thế $\leqslant c$. Ngoài ra, G' vẫn còn liên thông (nếu cần đi từ A_1 đến A_2 chỉ cần đi vòng A_1, A_k, ..., A_3, A_2). Theo giả thiết, có thể xây dựng G' từ một cây nào đó. Sau đó chỉ cần thêm vào G' cạnh A_1, A_2 để thu được G. □

Nhận xét. Ta biết rằng số cạnh của một cây bằng số đỉnh trừ đi 1. Như vậy, để xây dựng lại một đồ thị $G=(V, E)$, cần thêm vào $|E|+1-|V|$ cạnh vào một cây bao trùm G.

1.4 Đồ thị đầy đủ, đồ thị đa phần

Định nghĩa 6. *Ta gọi đồ thị đầy đủ là một đồ thị mà hai đỉnh bất kỳ được nối với nhau bởi một cạnh. Ta ký hiệu K_n một đồ thị đầy đủ n đỉnh.*

Như vậy, một đồ thị đầy đủ là một đồ thị có số cạnh cực đại trên một tập đỉnh cho trước.

Trái ngược với tính chất trên,

Định nghĩa 7. *Một tập con các đỉnh của một đồ thị được gọi là độc lập với nhau nếu hai đỉnh bất kỳ trong đó không được nối với nhau bởi một cạnh.*

Định nghĩa 8. *Một đồ thị được gọi là đồ thị hai phần nếu có thể phân chia các đỉnh của nó thành hai tập hợp, mỗi tập gồm các đỉnh độc lập với nhau. Tương tự, ta có định nghĩa cho các đồ thị 3 phần, ..., k-phần.*

Trong trường hợp một đồ thị hai phần với $X \cup Y$ là một phân hoạch các đỉnh thành hai tập đỉnh độc lập thỏa mãn mọi đỉnh của X được nối với mọi đỉnh của Y (một phân chia như vậy rõ ràng là duy nhất) thì ta ký hiệu $K_{X,Y}$, hay $K_{m,n}$ (m, n tương ứng là lực lượng của X, Y) cho đồ thị như vậy.

Ví dụ 6. *Đồ thị biểu diễn bài toán về ba ngôi nhà và ba nhà máy điện, nước, khí đốt là một đồ thị hai phần, cụ thể hơn, là một đồ thị $K_{3,3}$.*

Một đồ thị hai phần có thể chấp nhận nhiều cách phân chia các đỉnh thành hai tập đỉnh độc lập (ví dụ một đồ thị chỉ gồm các đỉnh cô lập). Ta có cách miêu tả trừu tượng khác về các đồ thị hai phần như sau:

Mệnh đề 4 (Koenig). *Một đồ thị là hai phần khi và chỉ khi không có chu trình độ dài lẻ.*

Chứng minh. (a) *Giả sử G là một đồ thị hai phần.* Rõ ràng một chu trình sẽ đi qua các đỉnh của mỗi tập đỉnh độc lập một cách *luân phiên* và do đó chỉ có thể quay lại đỉnh đầu tiên sau một số chẵn lần. Nói cách khác, mọi chu trình (nếu có) của G phải có độ dài chẵn.

(b) *Giả sử G không có chu trình độ dài lẻ.* Ta sẽ xây dựng cụ thể một phân đôi của G bằng cách đưa vào hàm khoảng cách. Dễ thấy có thể giả thiết G *liên thông*, nếu không chỉ cần tiến hành cho từng thành phần liên thông rồi ghép các phân đôi lại. Gọi A là một đỉnh bất kỳ của G (liên thông). Với mỗi đỉnh B của G ký hiệu $d(A, B)$ là *khoảng cách* giữa hai đỉnh A và B, được định nghĩa như là độ dài ngắn nhất trong số các độ dài các đường đi từ A tới B (như vậy $d(A, A) = 0$). Chú ý rằng giả thiết G liên thông đảm bảo cho việc định nghĩa này là tốt.

Gọi X, Y tương ứng là tập các đỉnh có độ dài tới A là chẵn, lẻ. Hiển nhiên X, Y tạo thành một phân hoạch của tập đỉnh của G. Hơn nữa mỗi tập X, Y là một tập đỉnh độc lập. Chẳng hạn, giả sử $B, C \in X$ sao cho (B, C) là một cạnh của G. Thế thì bằng cách nối các đường đi độ dài ngắn nhất từ A đến B, rồi cạnh (B, C), đường đi có độ dài ngắn nhất từ C tới A (có thể cần phải bỏ một số cạnh trùng nhau và đỉnh lặp) ta sẽ thu được một chu trình có độ dài lẻ, mâu thuẫn với giả thiết ban đầu. □

Nhận xét. Ta sẽ đưa ra một đặc trưng khác của các đồ thị 2 phần thông qua số sắc tố.

Hệ quả 2. *Mọi cây là một đồ thị hai phần.*

Ví dụ 7. *Chứng minh trực tiếp cây là một đồ thị hai phần.*

Bài tập tự luyện

Bài tập 1. Có 32 đội bóng tham gia một giải đấu bóng đá. Ngày đầu tiên, mỗi đội chơi đúng một trận. Ngày thứ hai, mỗi đội chơi thêm đúng một trận nữa. Chứng minh rằng sau ngày thi đấu thứ hai, ta có thể chọn ra được 16 đội bóng sao cho hai đội bóng bất kỳ trong số đó chưa từng thi đấu với nhau.

Bài tập 2. Trong một quốc gia nọ có $\geqslant 101$ thành phố và các đường bay (hai chiều) nối một số các thành phố. Biết rằng thủ đô có đường bay trực tiếp tới 100 thành phố khác và một thành phố bất kỳ, không phải là thủ đô, có đường bay trực tiếp đến đúng 10 thành phố khác, ngoài ra hai thành phố bất kỳ được nối với nhau bằng một đường bay trực tiếp hay gián tiếp. Chứng minh rằng có thể đóng một nửa số đường bay phục vụ thủ đô sao cho vẫn có thể bay từ một thành phố bất kỳ đến một thành phố bất kỳ khác.

Bài tập 3. Trong một nhóm người, một số người quen biết nhau và một số người không. Mỗi tối, một người nào đó đãi tiệc mời tất cả những người mình quen biết và giới thiệu họ cho nhau. Biết rằng, sau khi mỗi người đều đã tổ chức tiệc vẫn còn hai người trong nhóm chưa biết nhau. Chứng minh rằng, tại bữa tiệc tiếp theo, họ vẫn không được giới thiệu cho nhau.

Bài tập 4. Người ta đặt các viên sỏi vào các ô của một bảng vuông $n \times n$ sao cho:

(i) Mỗi ô không chứa sỏi bất kỳ kề (có một cạnh chung) với một ô chứa sỏi;

(ii) Với hai ô chứa sỏi O_1, O_2 bất kỳ, có một dãy các ô chứa sỏi, bắt đầu từ O_1 và kết thúc tại ô O_2 sao cho hai ô liên tiếp trong dãy đều kề nhau.

Chứng minh rằng có không ít hơn $\frac{n^2-2}{3}$ viên sỏi.

Bài tập 5. Trong một mạng xã hội gồm ít nhất 7 người, mỗi người trao đổi thư từ với đúng 3 người khác trong số đó. Chứng minh rằng có thể phân chia mạng xã hội ra thành 2 nhóm khác rỗng sao cho mỗi người trao đổi thư từ với ít nhất 2 người trong nhóm mà mình nằm trong.

Bài tập 6. Trong một hội nghị có 2010 người. Chứng minh rằng có thể tìm được hai người tại hội nghị sao cho họ có một số chẵn (có thể là 0) những người quen chung tại hội nghị.

Bài tập 7. Nhà vua một nước nọ quyết định xây dựng n thành phố và $n-1$ con đường liên kết chúng: mỗi con đường nối hai thành phố và không đi qua một thành phố khác và hai con đường bất kỳ không giao nhau. Nhà vua cũng muốn rằng khoảng cách nhỏ nhất giữa hai thành phố (theo đường bộ) là $1, 2, \ldots, \frac{n(n-1)}{2}$. Có thể thực hiện ước muốn của nhà vua không nếu:

(a) $n = 6$;

(b) $n = 2011$.

Bài tập 8. Người ta viết các số $0, 1, \ldots, 9$, mỗi số đúng 10 lần, vào các ô vuông của một bảng 10×10. Chứng minh rằng có thể tìm được một hàng hay một cột chứa ít nhất 4 số phân biệt.

Bài tập 9. Tại một miền nọ có 50 khu dân cư và một số con đường đất giữa chúng. Người ta có thể di chuyển từ một khu dân cư tùy ý đến một khu dân cư tùy ý khác bằng các con đường trên. Chứng minh rằng người ta có thể trải nhựa một số con đường sao cho ở mỗi khu dân cư, số con đường nhựa đi ra khỏi đó là một số lẻ.

2 Đồ thị phẳng

2.1 Định nghĩa

Định nghĩa 9. *Một đồ thị sao cho ta có thể biểu diễn các đỉnh bởi các điểm trong mặt phẳng và các cạnh bởi các đường cong đôi một không giao nhau được gọi là một đồ thị phẳng. Khi đó, ta gọi một biểu diễn như vậy là một biểu diễn phẳng của đồ thị.*

Ta có lưu ý quan trọng sau: Một đồ thị có thể được biểu diễn bằng nhiều cách khác nhau. Thế nên không phải vì một biểu diễn nào đó của đồ thị không là phẳng mà ta có thể kết luận được rằng đồ thị không phải là đồ thị phẳng. Một đồ thị là phẳng nếu có *một* biểu diễn phẳng.

Nhận xét. Có thể chứng minh được rằng một đồ thị phẳng có một biểu diễn phẳng sao cho tất cả các cạnh là các đoạn thẳng.

Cho G là một đồ thị phẳng và cho một biểu diễn phẳng của G. Thế thì các cạnh của G phân chia mặt phẳng thành các vùng.

Định nghĩa 10. *Một mặt của đồ thị là một vùng cực đại (theo quan hệ bao hàm) không chứa bất kỳ đỉnh cũng như một phần nào của các cạnh của đồ thị.*

Nói riêng, một biểu diễn phẳng của một đồ thị phẳng chấp nhận ít nhất một mặt không bị chặn, thậm chí có *duy nhất* một mặt không bị chặn.

Mệnh đề 5. *Một đồ thị là phẳng nếu và chỉ nếu có thể biểu diễn trên một mặt cầu (sao cho không có hai cạnh nào giao nhau thực sự).*

Chứng minh. Sử dụng phép chiếu cầu với tâm phép chiếu tại Bắc cực: biến mặt phẳng thành mặt cầu. □

Nhận xét. Với biểu diễn cầu, mặt không bị chặn của đồ thị phẳng ban đầu trở thành thành phần liên thông (trên mặt cầu) chứa Bắc cực. Tất cả các mặt trở nên bị chặn (và *có vai trò như nhau*).

2.2 Công thức Euler

Cho dù một đồ thị phẳng có thể có nhiều biểu diễn phẳng khác nhau, tuy nhiên số mặt của một đồ thị phẳng không phụ thuộc vào biểu diễn. Cụ thể hơn,

Định lý 3 (Công thức Euler). *Cho G là một đồ thị phẳng liên thông với n đỉnh, e cạnh. Giả sử f là số mặt của một biểu diễn phẳng của G. Thế thì*

$$n - e + f = 2.$$

Tổng quát hơn, với các giả thiết và ký hiệu trên, nhưng G không giả thiết liên thông nữa. Gọi k là số thành phần liên thông của G thì

$$n - e + f = k + 1.$$

Chứng minh. Trước tiên ta giả sử G liên thông. Để chứng minh công thức của định lý, ta sẽ kiểm tra công thức cho các cây và chỉ ra rằng đại lượng $n - e + f$ không đổi khi ta thêm vào một cạnh. Điều này được suy ra từ việc mọi đồ thị liên thông được xây dựng từ cây bằng cách mỗi lần cho thêm một cạnh, hơn nữa, nếu một đồ thị phẳng G nhận được từ đồ thị G' bằng cách thêm vào một cạnh thì G' cũng là một đồ thị phẳng. Ta kiểm tra cho cây. Chú ý rằng với

một cây, $n - e = 1$. Hơn nữa, với một (biểu diễn phẳng của) cây, chỉ có duy nhất một mặt, đó chính là mặt không bị chặn. Thật vậy, mọi mặt bị chặn sẽ làm xuất hiện các chu trình trên đồ thị. Như vậy, với một cây ta có $f = 1$ và công thức được kiểm chứng.

Giả sử công thức ta quan tâm đúng cho một đồ thị phẳng G' với n' đỉnh, e' cạnh và f' mặt và sao cho ta có thể thêm một cạnh vào G' mà đồ thị mới G vẫn còn phẳng. Thế thì G có $n = n'$ đỉnh, $e = e' + 1$ cạnh. Mặt khác, cạnh mới thêm vào chia một mặt cũ (của G') thành hai mặt mới (của G), các mặt khác không đổi. Thật vậy, giả thiết G là phẳng chứng tỏ rằng cạnh mới thêm vào không cắt bất kỳ cạnh nào khác của G', do đó nằm hoàn toàn trong một các mặt của G', ngoài ra, tính liên thông của G' chứng tỏ rằng không một đầu mút nào của cạnh thêm vào là cô lập. Như vậy, G có $f = f' + 1$ mặt. Công thức cho G' kéo theo công thức đối với G.

Bây giờ, ta xét trường hợp tổng quát một đồ thị phẳng G với k thành phần liên thông. Bởi vì các thành phần liên thông (theo nghĩa đồ thị) là đôi một rời nhau, ta có thể biểu diễn mỗi thành phần liên thông nằm trong mặt không bị chặn của mỗi thành phần liên thông khác. Ta áp dụng công thức thiết lập ở trên cho từng thành phần liên thông rồi cộng tất cả các đẳng thức lại. Tổng của tất cả các đỉnh cũng như các mặt của mỗi thành phần liên thông lần lượt cho ta tổng số đỉnh, tổng số cạnh của G. Mặt khác, tổng số các mặt của các thành phần liên thông chính bằng số mặt của G cộng với $k - 1$ bởi vì mỗi mặt bị chặn được tính đúng một lần, riêng mặt không bị chặn được tính k lần. Như vậy ta có công thức cần tìm. □

Một đồ thị (đơn) phẳng không thể có quá nhiều cạnh so với số đỉnh. Cụ thể,

Mệnh đề 6. *Cho G là một đồ thị (đơn) phẳng với $n \geqslant 3$ đỉnh và e cạnh. Thế thì,*

$$e \leqslant 3n - 6.$$

Chứng minh. Theo công thức Euler, dù G là liên thông hay không, ta luôn có

$$n + f \geqslant e + 2.$$

Lại do G là đơn, mỗi mặt sử dụng ít nhất 3 cạnh. Ngược lại, mỗi cạnh tham gia cho việc hình thành của 2 mặt. Từ đó suy ra $3f \leqslant 2e$. Như vậy ta có $n + \frac{2}{3}e \geqslant e + 2$, hay $e \leqslant 3n - 6$. □

Nhận xét.

- Dấu bằng trong bất đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi mỗi mặt của G là một tam giác (hay biên mỗi mặt là một 3-chu trình). Một đồ thị như vậy gọi là một *tam giác phân.*
- Nói riêng, mọi đồ thị phẳng trên n đỉnh có ít hơn $3n$ cạnh.

Mệnh đề 7. *Mọi đồ thị liên thông, phẳng trên một tập hữu hạn đỉnh có một đỉnh bậc $\leqslant 5$.*

Chứng minh. Gọi δ là bậc nhỏ nhất của một đồ thị phẳng $G = (V, E)$. Thế thì, nếu $|V| \geqslant 3$,

$$\delta|V| \leqslant \sum_{A \in V} \deg(A) = 2|E| \leqslant 2\big(3|V| - 6\big).$$

Do đó $\delta \leqslant 6 - \frac{12}{|V|}$ và $\delta \leqslant 5$. Các trường hợp $|V| = 1, 2$ là tầm thường. □

Ta có hai ví dụ quan trọng về đồ thị không phẳng.

Định lý 4. *Đồ thị K_5 không phải là phẳng.*

Chứng minh. Áp dụng mệnh đề ??. □

Định lý 5. *Đồ thị $K_{3,3}$ không phải là một đồ thị phẳng.*

Chứng minh. Giả sử $K_{3,3}$ là một đồ thị phẳng với f mặt. Theo công thức Euler, ta có

$$6 - 9 + f = 2.$$

Như vậy, $f = 5$. Mặt khác, do $K_{3,3}$ là một đồ thị hai phần, không một mặt nào của K là tam giác. Hơn nữa, mặt không bị chặn cũng không phải được tạo thành từ một tam giác (không phải là phần bù của một tam giác). Từ đó suy ra mỗi mặt của $K_{3,3}$ sử dụng ít nhất 4 cạnh. Rõ ràng mỗi cạnh là cạnh (biên) của hai mặt.

Các lập luận trên chứng tỏ 2 lần số cạnh $\geqslant$ 4 lần số mặt f, nghĩa là $f \leqslant \frac{9}{2}$, mâu thuẫn với $f = 5$ thu được từ công thức Euler. □

Ta vừa thấy rằng công thức Euler cho ta một điều kiện cần để một đồ thị là phẳng. Nhưng nó không giúp ta trong việc khẳng định một đồ thị là phẳng. Câu hỏi về tính phẳng của một đồ thị được giải quyết hoàn toàn (về mặt lý thuyết) bởi Kuratowski. Theo những gì ta thiết lập ở trên, các đồ thị $K_{3,3}$ và K_5 không phải là đồ thị phẳng. Từ đây, ta dễ dàng suy ra rằng *các đồ thị chứa một chia nhỏ của đồ thị $K_{3,3}$ hay $K_{5,5}$ không phải là đồ thị phẳng.* Khẳng định đảo cũng đúng, đó chính là nội dung của Định lý Kuratowski.

Định lý 6 (Kuratowski). *Một đồ thị là phẳng khi và chỉ khi nó không chứa một chia nhỏ của $K_{3,3}$ hay K_5.*

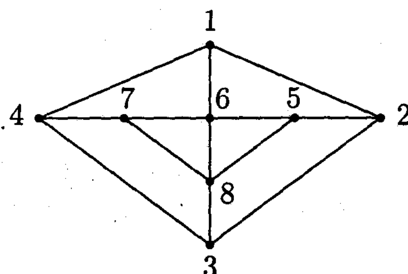
Chứng minh. Ta chấp nhận kết quả này. □

Ví dụ 8. *Với n là một số nguyên dương, ký hiệu G_n là đồ thị trên tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ và hai đỉnh $a \neq b$ được nối với nhau nếu $a + b$ là một số nguyên tố. Xác định các giá trị n sao cho G_n là phẳng.*

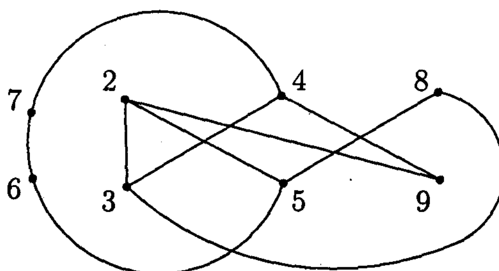
Lời giải. G_n phẳng khi và chỉ khi $n \leqslant 8$. Bởi vì G_m là đồ thị con của G_n nếu $m \leqslant n$ nên khẳng định được chứng minh nếu ta chỉ ra

- G_8 là phẳng;
- G_9 không phẳng.

Ta chỉ ra một biểu diễn phẳng của G_8 như sau:



Còn G_9 không phẳng vì chứa một chia nhỏ của $K_{3,3}$ như được chỉ ra tại biểu diễn sau đây:



□

2.3 Các khối đa diện đều

Các đỉnh và các cạnh của một khối đa diện lồi có thể được coi như một đồ thị phẳng (biểu diễn cầu của một đồ thị phẳng). Ta có các quan sát đơn giản sau đây. Gọi n, e, f lần lượt là số đỉnh, số cạnh và số mặt của một đa diện lồi P.

(a) Bậc của mỗi đỉnh $\geqslant 3$ (nếu không sẽ không tạo thành *khối*!);

(b) $n - e + f = 2$. Nói cách khác *công thức Euler cho đa diện lồi*;

(c) Công thức tổng các bậc $2e = \sum_{A,\, A \text{ là đỉnh của } P} \deg P$ được mở rộng thành

$$\sum_{A,\, A \text{ là đỉnh của } P} \deg P = 2e = \sum_k k f_k,$$

trong đó f_k là số các k-mặt của đa diện (các mặt là các k-giác, nói riêng tổng lấy trên các $k \geqslant 3$). Điều này được suy ra từ sự kiện mỗi cạnh là giao của đúng hai mặt.

Ta có thể định nghĩa một khối đa diện (lồi) đều là một đa diện (lồi) mà mỗi mặt là một đa giác đều kích thước bằng nhau và mỗi đỉnh có bậc như nhau.

Việc phân loại các đa diện đều được biết đến từ lâu bởi Platon.

Định lý 7. *Có tất cả 5 loại khối đa diện đều.*

Chứng minh. Có thể coi một khối đa diện đều như một đồ thị G phẳng trên n đỉnh, mỗi đỉnh có bậc k, mỗi mặt có biên là một chu trình độ dài l (số cạnh của đa giác đều). Gọi f là số mặt, e là số cạnh. Thế thì ta có các công thức sau

$$kn = 2e = lf.$$

Vậy $n = \frac{2e}{k}$, $l = \frac{2e}{l}$. Lắp các công thức này vào công thức Euler ta có

$$e\left(\frac{2}{k} - 1 + \frac{2}{l}\right) = 2.$$

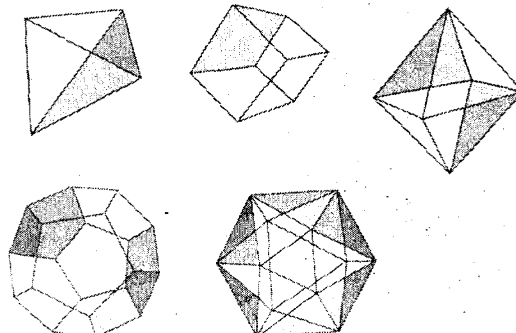
Nói riêng $\frac{2}{k} - 1 + \frac{2}{l} > 0$, hay

$$(k-2)(l-2) < 4.$$

Mặt khác chú ý rằng $k \geqslant 3$, $l \geqslant 3$. Kết hợp với bất đẳng thức $(k-2)(l-2) < 4$, ta suy ra $3 \leqslant k, l \leqslant 5$. Thử lại ta thấy các bộ thỏa mãn các bất đẳng thức trên là

$$(k,\, l) = (3,\, 3),\ (3,\, 4),\ (3,\, 5),\ (4,\, 3),\ (5,\, 3).$$

Đảo lại, ứng với các giá trị này ta có các đa diện đều: tứ diện đều, khối lập phương, khối bát diện đều, khối thập nhị diện đều (mười hai mặt) và nhị thập diện (hai mươi mặt) đều.



□

Bài tập tự luyện

Bài tập 10. Có 11 thành phố được kết nối đôi một bởi hoặc đường ô tô, hoặc đường tàu hỏa (hoạt động theo cả hai chiều). Chứng minh rằng có ít nhất một giao lộ giữa hai đường ô tô hoặc giữa hai đường tàu.

Bài tập 11. Tồn tại hay không một đa diện lồi có 2011 đỉnh, 4019 cạnh và không có mặt nào là một tam giác?

Bài tập 12. Chứng minh rằng mọi đa diện lồi không có mặt là tứ giác hay ngũ giác phải có ít nhất 4 mặt tam giác.

Bài tập 13. Cho một đa diện lồi P với tất cả các mặt là tam giác. Mỗi đỉnh có bậc $\geqslant 5$ (có ít nhất 5 cạnh kề), ngoài ra không có hai đỉnh bậc 5 nào kề nhau. Chứng minh rằng đa diện P có một mặt với các đỉnh bậc tương ứng là 5, 6 và 6.

Bài tập 14 (IMOSL, 2006). Xét một đa diện lồi không có hai cạnh song song cũng như không có cạnh nào song song với bất kỳ mặt nào ngoài hai kề nó. Hai điểm của đa diện được gọi là đối cực nếu tồn tại hai mặt phẳng song song, đi qua hai điểm đó sao cho đa diện đã cho nằm giữa hai mặt phẳng này. Gọi A là số cặp đỉnh đối cực, B số cặp trung điểm các cạnh đối cực. Biểu diễn $A - B$ theo số cạnh, đỉnh và mặt của đa diện.

ĐỊNH LÝ LAGRANGE VÀ ỨNG DỤNG

Đặng Đức Trọng[1]

Trong chương trình Giải tích phổ thông, có một định lý phát biểu rất đơn giản nhưng lại có những ứng dụng rất sâu sắc. Đó là định lý Lagrange về giá trị trung gian. Bài viết này trình bày về định lý Lagrange và các định lý liên quan, cũng như những ứng dụng phong phú của chúng trong giải toán.

1 Định lý Cauchy về giá trị trung gian

Định lý Cauchy về giá trị trung gian phát biểu rằng:

Định lý 1. *Một hàm số liên tục trên một đoạn nhận mọi giá trị trung gian, nghĩa là, nếu hàm số liên tục nhận hai giá trị khác nhau, thì nó nhận mọi giá trị nằm giữa hai giá trị này.*

Để chứng minh định lý này, trước hết ta cần hiểu thế nào là một hàm liên tục. Đồ thị của một hàm số liên tục, nói nôm na có tính chất là nó có thể vẽ mà không dứt nét bút khỏi mặt giấy. Còn định nghĩa chặt chẽ của nó như sau:

Định nghĩa 1. *Ta nói hàm số f liên tục tại điểm x_0, nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho nếu $|x - x_0| < \delta$ thì*

$$\left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon.$$

Hàm số được gọi là liên tục trên một đoạn, nếu nó liên tục tại mọi điểm của đoạn.

Từ định nghĩa này suy ra, nếu hàm số khác 0 tại một điểm nào đó, thì nó sẽ giữ nguyên dấu tại một khoảng (hay nửa khoảng, nếu điểm đó là đầu mút của đoạn thẳng) chứa điểm này. Ta chỉ cần đến tính chất này.

Bây giờ, ta sẽ tìm cách chứng minh định lý Cauchy. Chú ý rằng để thực hiện điều này, thực chất ta chỉ cần chứng minh:

Định lý 2. *Một hàm số liên tục trên một đoạn, nhận ở hai đầu mút các giá trị trái dấu, sẽ nhận giá trị 0 trên đoạn này.*

Ta chứng minh định lý Cauchy trong cách phát biểu này, tìm kiếm nghiệm của hàm số bằng phương pháp "chia để trị".

Chứng minh. Ta chia đoạn thẳng thành hai phần. Nếu như tại điểm này hàm số bằng 0 thì định lý được chứng minh. Nếu như tại điểm này hàm số khác 0, thì trên một trong hai đoạn thẳng, hàm số sẽ nhận các giá trị trái dấu tại hai đầu mút.

Ta lại chia đoạn thẳng này làm đôi và cứ tiếp tục như thế. Nếu như trong quá trình thực hiện ta không gặp một điểm giữa có giá trị hàm số tại đó bằng 0 thì ta sẽ thu được dãy các đoạn thẳng lồng nhau $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$ có độ dài dần đến 0.

Theo bổ đề về các đoạn thẳng lồng nhau, tồn tại điểm ξ thuộc tất cả các đoạn thẳng. Theo tính chất về bảo toàn dấu, giá trị hàm số tại ξ phải bằng 0. Định lý Cauchy được chứng minh. □

[1]Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh.

Từ định lý Cauchy suy ra một kết quả đơn giản nhưng khá quan trọng về nghiệm của đa thức:

Hệ quả 1. *Mọi đa thức bậc lẻ với hệ số thực đều có ít nhất một nghiệm thực.*

Chứng minh. Chú ý rằng mọi đa thức là hàm số liên tục trên toàn trục số. Giả sử

$$f(x) = x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_1x + a_0.$$

Khi đó, với x dương, ta có

$$f(x) = x^{2n+1}\left(1 + \frac{a_{2n}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{2n}} + \frac{a_0}{x^{2n+1}}\right),$$

Như thế, với x đủ lớn, $f(x)$ sẽ lớn hơn $\frac{x^{2n+1}}{2}$, tức là $f(x)$ là một số dương. Hoàn toàn tương tự, có thể chứng minh rằng với x đủ nhỏ thì $f(x)$ sẽ âm. Do vậy, theo định lý Cauchy về giá trị trung gian, $f(x)$ có nghiệm. □

Định lý Cauchy còn có một hệ quả khác:

Hệ quả 2. *Một hàm liên tục từ đoạn thẳng vào chính nó có điểm bất động (nghĩa là, nếu f là một hàm liên tục trên $[a, b]$, $a < b$ và $a \leqslant f(x) \leqslant b$ với mọi x thuộc $[a, b]$ thì tồn tại điểm x_0 thuộc $[a, b]$ sao cho $f(x_0) = x_0$).*

Bạn đọc có thể tự chứng minh kết quả này.

2 Định lý Weierstrass về cực trị của hàm số liên tục trên một đoạn

Định lý Weiestrass và các mở rộng của nó có nhiều ứng dụng trong Toán học. Định lý này được phát biểu khá đơn giản như sau:

Định lý 3. *Hàm liên tục trên một đoạn thẳng sẽ đạt được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn này.*

Chứng minh. Giả sử $f(x)$ là hàm liên tục trên một đoạn thẳng nào đó. Không mất tính tổng quát, giả sử đó là đoạn $\mathbb{I} = [0, 1]$. Trước hết ta chứng minh rằng f bị chặn trên $\mathbb{I}$.

Giả sử ngược lại, f có thể nhận trên $\mathbb{I}$ các giá trị lớn tuỳ ý. Khi đó với mọi số nguyên dương n, tồn tại điểm x_n thuộc $\mathbb{I}$ sao cho $f(x_n) > n$. Như vậy trên $\mathbb{I}$ ta xây dựng được một dãy vô hạn các điểm. Chia đoạn thẳng ra làm đôi. Trên một trong hai đoạn thẳng sẽ có chứa vô số điểm. Lại chia đoạn đó ra làm đôi và cứ tiếp tục như thế.

Theo bổ đề về dãy các đoạn thẳng lồng nhau, tồn tại một điểm thuộc vào tất cả các đoạn thẳng này. Từ định nghĩa liên tục suy ra trên một đoạn nhỏ chứa điểm này, hàm số bị chặn, nhưng điều này trái với cách xây dựng điểm ở trên.

Ta đã chứng minh rằng $f(x)$ bị chặn trên. Giả sử f không đạt giá trị lớn nhất. Điều này có nghĩa là tồn tại số M sao cho $f(x) < M$ với mọi x thuộc $\mathbb{I}$, đồng thời $f(x)$ nhận các giá trị gần M tuỳ ý. Với mỗi số nguyên dương m, tồn tại điểm y_m sao cho

$$f(y_m) > M - \frac{1}{m}.$$

Ta lại xây dựng một tập hợp vô hạn các điểm. Tiếp tục chia đoạn thẳng $\mathbb{I}$ làm hai phần và làm giống như phần chứng minh tính bị chặn của $f(x)$ ở trên. Và cũng như ở trên, ta tìm được điểm ξ thuộc vào tất cả các đoạn thẳng.

Theo cách xây dựng và từ định nghĩa liên tục, ta thấy $f(\xi)$ phải bằng M. Tương tự chứng minh cho giá trị nhỏ nhất. Định lý Weierstrass được chứng minh. □

3 Bổ đề Fermat

Bổ đề Fermat cùng với định lý Weierstrass là cơ sở của chuỗi các định lý đẹp đẽ và sâu sắc liên quan đến đạo hàm và vi phân. Nội dung của bổ đề được phát biểu như sau:

Định lý 4. *Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, khả vi trên khoảng (a, b) và đạt cực trị tại điểm $\xi \in (a, b)$ thì $f'(\xi) = 0$.*

Chứng minh. Rõ ràng ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp ξ là điểm cực tiểu của f. Để chứng minh, ta xét đạo hàm bên trái và đạo hàm bên phải của f tại điểm ξ:

$$f'(\xi^+) = \lim_{x\to\xi^+} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}, \quad f'(\xi^-) = \lim_{x\to\xi^-} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}.$$

Chú ý rằng, do f đạt cực tiểu tại điểm ξ nên với x đủ gần ξ thì $f(x) - f(\xi)$ luôn không âm. Vì vậy giá trị dưới dấu lim ở đẳng thức thứ nhất luôn không âm, còn ở đẳng thức thứ hai luôn không dương. Do vậy, đạo hàm bên phải tại điểm ξ không âm, còn đạo hàm bên trái tại điểm ξ luôn không dương. Vì f khả vi nên hai đạo hàm này bằng nhau và vì thế bắt buộc phải bằng 0. Bổ đề Fermat được chứng minh. □

Từ kết quả này, ta sẽ lần lượt thu được các định lý Rolle, Lagrange và Cauchy dưới đây.

4 Các định lý Rolle, Lagrange và Cauchy

Định lý 5 (Rolle). *Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b). Ngoài ra, giả sử rằng $f(a) = f(b)$. Khi đó trên khoảng (a, b) tồn tại điểm ξ sao cho*

$$f'(\xi) = 0.$$

Nói một cách khác, giữa hai giá trị bằng nhau của một hàm khả vi luôn có nghiệm của đạo hàm của hàm số này.

Chứng minh. Để chứng minh, trước hết ta áp dụng định lý Weirestrass cho hàm liên tục $f(x)$. Hàm số này đạt giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m trên đoạn $[a, b]$. Có thể xảy ra hai trường hợp:

- *Nếu $M = m$*, thì $f(x)$ là hàm hằng trên $[a, b]$ và với mọi ξ thuộc (a, b), ta có $f'(\xi) = 0$.
- *Xét trường hợp $M > m$*. Do $f(a) = f(b)$ nên một trong hai giá trị M và m phải đạt được tại một điểm ξ thuộc (a, b). Nhưng khi đó, hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại điểm này và theo bổ đề Fermat, ta có $f'(\xi) = 0$.

Như vậy định lý đã được chứng minh. □

Từ định lý Rolle, ta suy ra *định lý Lagrange*, hay tương đương là *công thức Lagrange.*

Định lý 6 (Lagrange). *Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b). Khi đó, tồn tại ξ thuộc (a, b) sao cho*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

hay

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Công thức đầu tiên có một ý nghĩa hình học đơn giản là trên đường cong $y = f(x)$, giữa hai điểm $A(a, f(a))$ và $B(b, f(b))$ có một điểm C sao cho tiếp tuyến của đường cong tại C song song với dây cung AB.

Công thức ở dạng thứ hai được gọi là *công thức Lagrange về số gia hữu hạn.* Nó còn có thể được viết lại dưới dạng

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0).$$

Đây chính là công thức Taylor khai triển đến bậc thấp nhất. Từ đây, ta cũng suy ra công thức tính gần đúng bằng vi phân:

$$f(x + \Delta x) \sim f(x) + f'(\Delta x)\Delta x.$$

Chú ý rằng, để chứng minh định lý Lagrange ta chỉ cần xét hàm số

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

rồi áp dụng định lý Rolle cho hàm số này (do $g(a) = g(b) = f(a)$). Như vậy, định lý Lagrange được chứng minh thông qua định lý Rolle. Mặt khác, ta cũng dễ thấy định lý Rolle chính là một trường hợp đặc biệt của định lý Lagrange. Định lý sau đây mở rộng định lý Lagrange:

Định lý 7 (Cauchy). *Nếu mỗi một trong hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đều liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b) và ngoài ra $g'(x) \neq 0$ với mọi x thuộc (a, b) thì trên (a, b) tồn tại điểm ξ sao cho*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Chúng tôi dành việc chứng minh định lý Cauchy cho bạn đọc. Chú ý là định lý Lagrange chính là một trường hợp riêng của định lý Cauchy, khi $g(x) = x$.

Từ các định lý cơ bản trên đây, ta còn suy ra nhiều hệ quả và định lý quan trọng khác như quy tắc L'Hopitale về khử dạng vô định, công thức Taylor, ... Bạn đọc có thể tự tìm hiểu thêm về các kết quả thú vị (và quan trọng) này.

5 Ứng dụng của các định lý cơ bản của Giải tích

Trong phần này chúng ta xem xét những ví dụ áp dụng của các định lý trên.

Ví dụ 1. *Chứng minh rằng parabol $(P) : y = x^2 - 2x$ và ellip $(E) : \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ cắt nhau tại bốn điểm phân biệt A, B, C, D.*

Chứng minh. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (E) là

$$\frac{x^2}{9} + (x^2 - 2x)^2 = 1,$$

hay tương đương

$$9x^4 - 36x^3 + 37x^2 - 9 = 0.$$

Đặt $f(x) = 9x^4 - 36x^3 + 37x^2 - 9$ thì ta có

$$f(-1) = 73 > 0, \quad f(0) = -9 < 0, \quad f(1) = 1 > 0, \quad f(2) = -5 < 0, \quad f(3) = 81 > 0.$$

Từ đó, áp dụng định lý Cauchy về giá trị trung gian ta có phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1, 0)$, một nghiệm thuộc $(0, 1)$, một nghiệm thuộc $(1, 2)$, một nghiệm thuộc $(2, 3)$. Như thế, phương trình hoành độ giao điểm có 4 nghiệm phân biệt, do đó (P) và (E) cắt nhau tại 4 điểm phân biệt. □

Ví dụ 2. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có bất đẳng thức*

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Chứng minh. Áp dụng định lý Lagrange cho hàm $f(x) = \ln x$ trên đoạn $[n, n+1]$, ta có

$$f(n+1) - f(n) = f'(c), \quad c \in (n, n+1).$$

Từ đây ta có $\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{c}$, hay

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{c}, \quad c \in (n, n+1).$$

Dễ dàng suy ra được điều phải chứng minh từ đẳng thức này. □

Một trong những ứng dụng đẹp đẽ của định lý Lagrange là phép chuyển biểu thức đối xứng của n biến số về biểu thức đối xứng của $n-1$ biến số.

Ta minh họa ứng dụng này qua ví dụ sau.

Ví dụ 3. *Cho $x_1, x_2, x_3, x_4 > 0$. Xét đa thức $P(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$.*

(a) *Chứng minh rằng $P'(x)$ có nghiệm $y_1, y_2, y_3 > 0$;*

(b) *Chứng minh rằng $4y_1y_2y_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$;*

(c) *Cho $a, b, c, d > 0$. Áp dụng, chứng minh rằng*

$$\sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}} \leqslant \sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}.$$

Có thể thấy định lý Rolle và định lý Lagrange khá hiệu quả trong các bài toán liên quan đến nghiệm của phương trình.

Ví dụ 4. *Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện*

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0.$$

Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0, 1)$.

Chứng minh. Bài toán này có thể giải không dùng đến định lý Lagrange mà chỉ cần sử dụng tính chất hàm liên tục. Cụ thể, xét $f(0) = c$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c$ và $f(1) = a + b + c$ thì rõ ràng

$$f(0) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) = 0.$$

Tổng ba số bằng 0 thì hoặc tất cả bằng 0, hoặc có hai số trái dấu. Và như thế, theo định lý Cauchy về giá trị trong gian, ta có ít nhất một nghiệm nằm trong $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ hoặc $(0, 1)$, hoặc $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Nói cách khác, ta có ít nhất một nghiệm thuộc $(0, 1)$.

Tuy nhiên cách giải này tương đối thủ công và thiếu tự nhiên. Bây giờ ta đưa ra một cách giải khác đẹp đẽ hơn: Xét hàm số $f(x) = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx$ thì ta có

$$f(0) = 0, \quad f(1) = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0.$$

Theo định lý Rolle thì tồn tại x_0 thuộc $(0, 1)$ sao cho $f'(x_0) = 0$. Nhưng $f'(x) = ax^2 + bx + c$ nên ta có điều phải chứng minh. □

Ngoài những ví dụ được xét ở đây, còn rất nhiều những ứng dụng khác của định lý Lagrange và các định lý liên quan. Chúng ta tập hợp các bài toán này trong mục sau để cùng thảo luận.

6 Một số định lý và bài tập áp dụng

Bài tập 1. Giả sử hàm số $f : [0, 1] \to [0, 1]$ có đạo hàm trên $[0, 1]$. Chứng minh rằng nếu $|f'(x)| < 1$ với mọi $x \in [0, 1]$ thì phương trình $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất trên $[0, 1]$.

Bài tập 2. Cho $m > 0$ và các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện

$$\frac{a}{m+2} + \frac{b}{m+1} + \frac{c}{m} = 0.$$

Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (0, 1)$.

Bài tập 3. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $abc \neq 0$ và

$$\frac{a}{7} + \frac{b}{5} + \frac{c}{3} = 0.$$

Chứng minh rằng phương trình $ax^4 + bx^2 + c = 0$ có ít nhất một nghiệm thực.

Bài tập 4. Cho $n + 1$ số thực $a_0, a_1, \ldots, a_n$ thỏa mãn

$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0.$$

Chứng minh rằng phương trình $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực.

Bài tập 5. Cho $n + 1$ số thực $a_0, a_1, \ldots, a_n$ thỏa mãn

$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = a_0 + a_1 + \frac{2^2}{3}a_2 + \cdots + \frac{2^n}{n+1}a_n = 0.$$

Chứng minh rằng $na_n x^{n-1} + \cdots + 2a_1 x + a_0 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0, 2)$.

Bài tập 6. Chứng minh rằng phương trình

$$x^n + ax + b = 0$$

có không quá ba nghiệm phân biệt.

Bài tập 7. Cho các số thực $a_0, a_1, \ldots, a_n$ thỏa mãn $a_0 a_2 \geqslant 0$. Xét đa thức

$$P(x) = a_0 x^n + \sqrt{a_0 a_2}\, x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n.$$

Chứng minh rằng $P(x)$ không thể có n nghiệm phân biệt.

Bài tập 8. Cho tam thức bậc hai $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, phương trình $f(x) - \alpha f'(x) = 0$ cũng có hai nghiệm phân biệt.

Bài tập 9. Cho đa thức $P(x)$ có ba nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3$. Giả sử $f(x) = x^2 + ax + b$ có hai nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng đa thức $P''(x) + aP'(x) + bP(x)$ có ít nhất một nghiệm thuộc (x_1, x_3).

Bài tập 10. Cho $P(x)$ là đa thức bậc bốn có 4 nghiệm dương. Chứng minh rằng với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, đa thức $P(x) - \alpha P'(x)$ cũng có 4 nghiệm dương.

Bài tập 11. Cho hàm số f liên tục trên $[0, 1]$, khả vi trên $(0, 1)$ và $f(0) = f(1) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $f'(c) = f(c)$.

Bài tập 12. Cho hàm số f liên tục trên $[0, 1]$, khả vi trên $(0, 1)$ và $f(0) = -1$, $f(1) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $10f'(c) - f(c) = 11 - c$.

Bài tập 13. Cho hàm số f liên tục trên $[0, 1]$, khả vi trên $(0, 1)$ và $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Chứng minh rằng tồn tại hai số a, b phân biệt sao cho $f'(a)f'(b) = 1$.

Bài tập 14. Cho hàm số f liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b). Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left\{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}\right\}.$$

Bài tập 15. Cho hàm số f liên tục trên $[a, b]$, khả vi hai lần trên (a, b) và $f(a) = f(b) = 0$. Chứng minh rằng với mọi $c \in (a, b)$, tồn tại $\alpha \in (a, b)$ sao cho

$$2f(c) = (c-a)(c-b)f(\alpha).$$

Bài tập 16. Cho hai số thực a, b. Chứng minh các bất đẳng thức

(a) $|\sin a - \sin b| \leqslant |a - b|$;

(b) $\dfrac{b-a}{\cos^2 a} \leqslant \tan b - \tan a \leqslant \dfrac{b-a}{\cos^2 b}$ với $0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$.

Bài tập 17. Cho ba số thực dương a, b, c. Đặt $S = a+b+c$ và $T = a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$. Chứng minh rằng

$$3a < S - \sqrt{T} < S + \sqrt{T} < 3c.$$

Bài tập 18. Cho a, b, c, d là các số thực dương. Đặt

$$A = a+b+c+d, \quad B = ab+ab+ac+ad+bc+bd+cd, \quad C = abc+bcd+cda+dab.$$

Chứng minh rằng

(a) $9AC \leqslant 4B^2$;

(b) $3AB \leqslant A^3 + 2C$.

Bài tập 19 (Quy tắc Descartes về dấu). Cho $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ là một đa thức có hệ số thực. Gọi k là số lần đổi dấu trong dãy các hệ số khác 0 của $P(x)$ (giữ đúng thứ tự và bỏ các hệ số bằng 0). Khi đó số nghiệm dương của đa thức $P(x)$ bằng $k - 2s$, trong đó $0 \leqslant s \leqslant \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$. Hãy chứng minh.

Bài tập 20. Chứng minh rằng đạo hàm các bậc của hàm số $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ chỉ có các nghiệm thực, hơn nữa là các nghiệm đơn và mỗi nghiệm của đạo hàm bậc n nằm giữa hai nghiệm của đạo hàm bậc $n+1$.

Bài tập 21 (Việt Nam, 1994). Giả sử rằng đa thức bậc bốn $P(x)$ có 4 nghiệm dương. Chứng minh rằng phương trình

$$\frac{1-4x}{x^2}P(x) + \left(1 - \frac{1-4x}{x^2}\right)P'(x) - P''(x) = 0$$

cũng có 4 nghiệm dương.

Bài tập 22. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương và với mọi x, ta có

$$1+\cos x+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 3x}{3}+\cdots+\frac{\cos nx}{n}\geqslant 0.$$

Bài tập 23 (Quy tắc L'Hopitale). Cho hai hàm số f(x) và $g(x)$ xác định và khả vi khắp nơi trong một lân cận nào đó của điểm a, ngoại trừ có thể là điểm a. Giả sử rằng

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$$

và đạo hàm $g'(x)$ khác 0 khắp nơi trong lân cận nói trên của điểm a. Khi đó nếu tồn tại giới hạn $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, thì cũng tồn tại giới hạn $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, và ta có

$$\lim_{x\to a}\frac{f(a)}{g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Hãy chứng minh.

Bài tập 24 (Mở rộng định lý Rolle). Cho $0<a<b$. Nếu $f(x)$ bằng 0 tại $n+1$ điểm của đoạn $[a, b]$ và tất cả các nghiệm của đa thức $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ đều thực thì tại một điểm ξ nào đó thuộc (a, b), ta có đẳng thức

$$a_0f(\xi)+a_1f'(\xi)+\cdots+a_nf^{(n)}(\xi)=0.$$

Bài tập 25 (Mở rộng công thức Lagrange). Cho hàm số $f(x)$ liên tục, khả vi 2 lần tại lân cận điểm x_0. Chứng minh rằng với mọi x thuộc lân cận này, tồn tại ξ nằm giữa x_0 và x sao cho

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2.$$

Bài tập 26. Hàm số $f(x)$ khả vi hai lần trên toàn trục số và bị chặn. Chứng minh rằng tồn tại điểm x_0 sao cho $f''(x_0)=0$.

CÁC ĐỊNH LÝ LIÊN QUAN ĐẾN HÀM THỰC VÀ ỨNG DỤNG

Trần Minh Hiền[1]

1 Cơ sở lý thuyết

Định nghĩa 1. *Gọi $\mathcal{D}$ là một khoảng trong $\mathbb{R}$. Cho hàm số $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, và $x_0 \in \mathcal{D}$. Hàm f được gọi là liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho $\forall x \in \mathcal{D}$ mà $|x - x_0| < \delta$ thì*

$$\left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon. \tag{1}$$

Ta có một định nghĩa tương đương theo ngôn ngữ dãy như sau:

Định nghĩa 2. *Hàm f được gọi là liên tục tại x_0 nếu với mọi dãy $\{x_n\} \subset \mathcal{D}$ mà $x_n \to x_0$ thì*

$$f(x_n) \to f(x_0). \tag{2}$$

Ta chứng minh hai định nghĩa trên là tương đương.

Chứng minh. (a) (1) $\Rightarrow$ (2). Giả sử ta có dãy $\{x_n\} \subset \mathcal{D}$ mà $x_n \to x_0$, tức là $\forall \varepsilon_1 = \delta > 0$, tồn tại $N > 0$ sao cho $\forall n > N$ thì $|x_n - x| < \delta$. Theo điều kiện về liên tục, ta có

$$\left|f(x_n) - f(x_0)\right| < \varepsilon,$$

với $\varepsilon > 0$ tùy ý. Vậy (2) được chứng minh.

(b) (2) $\Rightarrow$ (1). Giả sử hàm f không liên tục tại x_0. Khi đó tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho với mọi $\delta > 0$ mà $|x - x_0| < \delta$ thì

$$\left|f(x) - f(x_0)\right| \geqslant \varepsilon.$$

Xét vào trường hợp cụ thể, tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho với mọi $\delta = \frac{1}{n} > 0$ mà $|x - x_0| < \frac{1}{n}$ thì

$$\left|f(x) - f(x_0)\right| \geqslant \varepsilon.$$

- Với $\delta = 1$, chọn một giá trị x_1 mà $|x_1 - x_0| < 1$, ta có $\left|f(x_1) - f(x_0)\right| \geqslant \varepsilon$.
- Với $\delta = \frac{1}{2}$, chọn một giá trị x_2 mà $|x_2 - x_0| < \frac{1}{2}$, ta có $\left|f(x_2) - f(x_0)\right| \geqslant \varepsilon$.
- ...
- Với $\delta = \frac{1}{n}$, chọn một giá trị x_n mà $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, ta có $\left|f(x_n) - f(x_0)\right| \geqslant \varepsilon$.

Cứ tiếp tục như vậy ta đã chọn được một dãy $\{x_n\} \subset \mathcal{D}$ mà $x_n \to x_0$, tuy nhiên với cách xây dựng ở trên thì $f(x_n) \not\to f(x_0)$, mâu thuẫn với (2). Vậy f liên tục. □

[1]Giáo viên trường THPT Chuyên Quang Trung, Bình Phước.

Định nghĩa 3. *Cho hàm số f xác định trên tập $X \subset \mathbb{R}$. Ta nói f đạt giá trị lớn nhất tại $x_0 \in X$ nếu $f(x_0) \geqslant f(x)$, $\forall x \in X$. Ngược lại, nếu có $x_0 \in X$ mà $f(x_0) \leqslant f(x)$, $\forall x \in X$ thì ta nói f đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0.*

Định lý 1. *Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì f đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a, b]$.*

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh f bị chặn trên đoạn $[a, b]$. Giả sử ngược lại, f không có chặn trên. Khi đó, với mọi $n > 0$, tồn tại $x_n \in [a, b]$ sao cho $f(x_n) > n$. Như thế dãy số (x_n) bị chặn ($a \leqslant x_n \leqslant b$), suy ra nó chứa dãy con (x_{n_k}) hội tụ về điểm $c \in [a, b]$ (vì $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$ với mọi k). Vì f liên tục tại c nên khi $k \to \infty$ thì

$$f(x_{n_k}) \to f(c) \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Mặt khác ta lại có $f(x_{n_k}) > n_k$ nên khi $k \to \infty$,

$$f(x_{n_k}) \to \infty. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra mâu thuẫn. Vậy $f\big([a, b]\big)$ phải bị chặn trên.

Lý luận tương tự ta cũng có f bị chặn dưới trên đoạn $[a, b]$, từ đó suy ra f bị chặn trên $[a, b]$.

Bây giờ, do $f\big([a, b]\big)$ bị chặn trên $[a, b]$ nên tồn tại $M = \sup f\big([a, b]\big)$ và $m = \inf f\big([a, b]\big)$. Với $M = \sup f\big([a, b]\big)$ thì tồn tại dãy $y_n = f(x_n) \in f\big([a, b]\big)$ sao cho

$$f(x_n) \to M.$$

Ta có (x_n) là dãy bị chặn (vì $a \leqslant x_n \leqslant b$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$) nên (x_n) có chứa một dãy con (x_{n_k}) hội tụ về $c \in [a, b]$, suy ra $f(x_{n_k}) \to f(c)$ (vì f liên tục) khi $k \to \infty$. Vì $\{f(x_{n_k})\}$ là dãy con hội tụ của dãy hội tụ $\{f(x_n)\}$ nên

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}),$$

tức là $M = f(c) \in f\big([a, b]\big)$ và do đó f đạt giá trị lớn nhất tại $c \in [a, b]$.

Phần chứng minh f đạt giá trị nhỏ nhất trên $[a, b]$ là hoàn toàn tương tự. □

Định lý 2 (Về giá trị trung gian). *Nếu f là hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a) < u < f(b)$ thì tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho $f(c) = u$.*

Chứng minh. Đặt $S = \{x \in [a, b] : f(x) \leqslant u\}$. Ta có $f(a) < u$ nên $a \in S$, tức là $S \neq \varnothing$. Hơn nữa $S \subset [a, b]$ nên S bị chặn, do đó tồn tại $c = \sup S$. Rõ ràng $a \leqslant c \leqslant b$. Vì $c = \sup S$ nên tồn tại dãy $(x_n) \subset S$ sao cho $x_n \to c$, suy ra $f(x_n) \to f(c)$, do tính liên tục của f.

Vì $x_n \in S$ nên $f(x_n) \leqslant u$, suy ra

$$f(c) \leqslant u.$$

Ta có $f(c) \leqslant u < f(b)$ nên phải có $c \neq b$, tức $a \leqslant c < b$. Xét dãy $c_n = c + \frac{1}{n}$ (với n đủ lớn để $c < c_n < b$) thì $c_n \notin S$ (vì $c_n > c = \sup S$). Do đó $f(c_n) > u$, $\forall n \in \mathbb{N}$, dẫn đến $\lim f(c_n) \geqslant u$. Mà f liên tục và $c_n \to c$ nên từ đây ta có

$$\lim_{n\to\infty} f(c_n) = f(c) \geqslant u.$$

Kết hợp với trên, ta được $f(c) = u$. Và do $f(a) < u$ (theo giả thiết) nên $c \neq a$. Vậy tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = u$. □

Hệ quả 1. *Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì $f([a, b]) = [m, M]$, trong đó m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[a, b]$.*

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh $f([a, b]) \subset [m, M]$ và $[m, M] \subset f([a, b])$, từ đó suy ra

$$f([a, b]) = [m, M].$$

(a) *Chứng minh* $f([a, b]) \subset [m, M]$. Với mỗi $y \in f([a, b])$ thì có $x \in [a, b]$ để $y = f(x)$. Mà $m \leqslant f(x) \leqslant M$ nên ta có $y \in [m, M]$. Do đó $f([a, b]) \subset [m, M]$.

(b) *Chứng minh* $f([a, b]) \supset [m, M]$. Với mỗi $y \in [m, M]$, ta có

- Nếu $y = m$ thì $y \in f([a, b])$ (theo định lý 1).
- Nếu $y = M$ thì $y \in f([a, b])$ (theo định lý 1).
- Nếu $m < y < M$ thì ta có

$$f(x_1) = m < f(x) = y < f(x_2) = M,$$

nên theo định lý 2, tồn tại $c \in (x_1, x_2) \subset [a, b]$ thỏa $f(c) = y$, tức là ta có $y \in f([a, b])$. Do đó $[m, M] \subset f([a, b])$. □

Hệ quả 2. *Cho hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$. Nếu $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x \in (a, b)$.*

Chứng minh. Kết quả này được suy ra trực tiếp bằng cách áp dụng định lý 2 với $u = 0$. □

Định lý 3 (Định lý Fermat). *Nếu hàm số f đạt cực trị tại x_0 và f khả vi tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.*

Chứng minh. Ta sẽ chỉ chứng minh cho trường hợp f đạt cực đại tại x_0, trường hợp còn lại có thể chứng minh tương tự. Giả sử f đạt cực đại tại x_0 thì ta có $f(x_0) \geqslant f(x_0 + h)$ với h đủ nhỏ để $x_0 + h \in V$ (V là một lân cận của x_0). Khi đó

$$\begin{cases} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leqslant 0, & h > 0 \\ \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0, & h < 0 \end{cases}$$

Cho $h \to 0$ thì do f khả vi tại x_0 nên ta có $f'_+(x_0) \leqslant 0$, $f'_-(x_0) \geqslant 0$ và

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0.$$

Đây chính là điều phải chứng minh. □

Định lý 4 (Định lý Rolle). *Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a, b]$ và khả vi trên khoảng (a, b). Giả sử $f(a) = f(b)$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.*

Chứng minh. Nếu f là hàm số hằng thì $f(x) = f(a)$, $\forall x \in [a, b]$, dẫn đến $f'(x) = 0$ với mọi $x \in [a, b]$ nên định lý được chứng minh.

Xét trường hợp f không là hàm hằng. Do $f(a) = f(b)$ nên tồn tại $x_0 \in (a, b)$ thỏa $f(x_0) > f(a)$ (hoặc $f(x_0) < f(a)$). Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $f(x_0) > f(a)$. Khi ấy, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$M = f(c) = \max_{x \in [a, b]} f(x),$$

hay nói cách khác, f đạt cực đại tại $c \in (a, b)$. Do f đạt cực đại và khả vi tại c nên theo định lý Fermat ta có $f'(c) = 0$. □

Định lý 5 (Định lý Cauchy[2]). *Cho f và g là hai hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$ và có đạo hàm trong khoảng (a, b). Nếu $g(a) \neq g(b)$ và $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Chứng minh. Xét hàm số $\varphi(x) = [f(b)-f(a)]g(x) - [g(b)-g(a)]f(x)$. Vì f và g liên tục trên đoạn $[a, b]$ nên φ liên tục trên đoạn $[a, b]$. Ta có f, g khả vi trên khoảng (a, b) nên φ cũng khả vi trên khoảng (a, b). Mặt khác,

$$\varphi(a) = [f(b)-f(a)]g(a) - [g(b)-g(a)]f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) = \varphi(b).$$

Do đó theo định lý Rolle, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $\varphi'(c) = 0$, tức là

$$[f(b)-f(a)]g'(c) - [g(b)-g(a)]f'(c) = 0.$$

Vì $g(a) \neq g(b)$ và $g'(c) \neq 0$ nên ta có

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Định lý Cauchy được chứng minh. □

Định lý 6 (Định lý Lagrange hay còn gọi là định lý giá trị trung bình). *Nếu f liên tục trên đoạn $[a, b]$ và khả vi trên khoảng (a, b) thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Chứng minh. Kết quả định lý này có thể được suy ra trực tiếp bằng cách áp dụng định lý Cauchy cho hàm số $g(x) = x$. □

Định lý 7 (Công thức L'Hopitale). *Cho f và g là hai hàm số có đạo hàm trong một lân cận của a ($a \in \mathbb{R}$ hoặc $a = \pm\infty$), ngoại trừ tại $x = a$ và thỏa mãn đồng thời các tính chất:*

(*i*) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (*hoặc* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$).

(*ii*) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ *hoặc* $\alpha = \pm\infty$).

(*iii*) $g(x) \neq 0$ *và* $g'(x) \neq 0$ *với mọi* $x \in V\backslash\{a\}$.

Khi đó, ta có

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Chứng minh. (a) *Xét trường hợp $a \in \mathbb{R}$ và $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$.* Ta mở rộng hàm số f và g để chúng liên tục tại $x = a$ bằng cách đặt $f(a) = g(a) = 0$. Xét x khá gần a và áp dụng định lý giá trị trung bình Cauchy thì tồn tại ξ nằm giữa a và x sao cho

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

---

[2]Định lý giá trị trung bình tổng quát.

suy ra

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Cho $x \to a$ thì $\xi \to a$ nên ta có $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \to \alpha$ và do đó $\frac{f(x)}{g(x)} \to \alpha$, tức là ta đã chứng minh

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(b) *Xét trường hợp* $a = \infty$ *và* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$. Đặt $F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ và $G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$ thì hai hàm số F và G khả vi trong một lân cận W của $t = 0$, và thỏa

$$F'(t) = -\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right), \quad G'(t) = -\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \in W\backslash\{0\}.$$

Lại có

$$\lim_{t\to 0} F(t) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{t\to 0} G(t) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0.$$

Áp dụng kết quả phần (a) cho hai hàm F và G, ta được

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{F'(t)}{G'(t)},$$

từ đó suy ra

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(c) *Xét trường hợp* $a \in \mathbb{R}$ *và* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$. Áp dụng định lý Cauchy cho khoảng (x, x_0), ta thấy tồn tại $c \in (x, x_0)$ thỏa

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (a < x < c < x_0).$$

Ta lại có

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x)\left[1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}\right]}{g(x)\left[1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}\right]},$$

nên

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \cdot \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Do $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$ nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại x_0 khá gần a sao cho

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \alpha\right| < \varepsilon, \quad \forall x \in (a, x_0). \tag{1}$$

Chọn một x_0 thỏa điều kiện trên (sau đó giữ x_0 cố định), ta cho $x \to a$ (điều này không hề bị trở ngại với $a < x < x_0$) thì có $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ nên $\frac{g(x_0)}{g(x)} \to 0$, $\frac{f(x_0)}{f(x)} \to 0$, từ đó kết hợp với (1) ta suy ra $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$. Vậy ta đã chứng minh được

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(d) *Với* $a = \infty$ *và* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$. Làm tương tự như trường hợp $a \in \mathbb{R}$ với các hàm số $F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ và $G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$. □

Định lý 8 (Khai triển Taylor). *Cho hàm số f có đạo hàm tới cấp $n+1$ trên một khoảng $I = (\alpha, \beta)$ thì với $a \in I$, $x \in I$ tồn tại $\xi \in (a, x)$ sao cho*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Công thức trên gọi là khai triển Taylor của hàm $f(x)$ tại a (dĩ nhiên a là một số cố định cho trước, còn x thay đổi và do đó giá trị của ξ cũng thay đổi phụ thuộc vào x).

Chứng minh. Ta xét $a < x$ (trường hợp $a > x$ được xét tương tự). Xét các hàm số

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= f(x) - \left[f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right] \end{aligned}$$

và

$$G(x) = (x-a)^{n+1}.$$

Ta có

$$G'(x) = (n+1)(x-a)^n, \quad G''(x) = (n+1)n(x-a)^{n-1}, \quad \ldots, \quad G^{(n+1)}(x) = (n+1)!$$

và

$$F'(x) = f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1}, \quad F''(x) = f''(x) - \sum_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-2)!}(x-a)^{k-2}, \quad \ldots,$$
$$F^n(x) = f^n(x) - f^n(a), \quad F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x).$$

Từ đó suy ra

$$F(a) = F'(a) = \cdots = F^{(n)}(a) = 0, \quad G(a) = G'(a) = \cdots = G^{(n)}(a) = 0.$$

Áp dụng định lý Cauchy thì tồn tại $c_1 \in (a, x)$ sao cho

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)}.$$

Dĩ nhiên c_1 luôn thay đổi. Lại áp dụng tiếp định lý Cauchy cho hai hàm số $F'(x)$, $G'(x)$ thì tồn tại $c_2 \in (a, c_1)$ mà

$$\frac{F'(c_1)}{G'(c_1)} = \frac{F'(c_1) - F'(a)}{G'(c_1) - G'(a)} = \frac{F''(c_2)}{G''(c_2)}.$$

Cứ thế tiếp tục như vậy, ta thấy tồn tại $a < c_n < c_{n-1} < \cdots < c_1 < x$ thỏa

$$\frac{F^{(n)}(c_n)}{G^{(n)}(c_n)} = \frac{F^{(n-1)}(c_{n-1})}{G^{(n-1)}(c_{n-1})} = \cdots = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)}.$$

Mặt khác, cũng theo định lý Cauchy thì

$$\frac{F^{(n)}(c_n)}{G^{(n)}(c_n)} = \frac{F^{(n)}(c_n) - F^{(n)}(a)}{G^{(n)}(c_n) - G^{(n)}(a)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{G^{(n+1)}(\xi)} \quad (a < \xi < c_n).$$

Liên kết tất cả các đẳng thức lại, ta suy ra tồn tại $\xi \in (a, c_n) \subset (a, x) \subset (\alpha, \beta)$ sao cho

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi)}{G^{(n+1)}(\xi)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

hay

$$F(x) = G(x) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Từ đó ta có ngay

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Công thức Taylor được chứng minh. □

Nhận xét. Khi hàm số f xác định trên khoảng $\mathbb{I}$ có chứa số 0 thì công thức Taylor của hàm f tại 0 là

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \text{với } \xi \in (0, x).$$

Công thức này được gọi là công thức khai triển Maclaurin.

Định lý 9 (Về liên tục và đơn điệu). *Giả sử $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục và là đơn ánh trên (a, b) thì hoặc là f đơn điệu tăng nghiêm ngặt hoặc là f đơn điệu giảm nghiêm ngặt trên $[a, b]$.*

Chứng minh. Đầu tiên ta chứng tỏ rằng f đơn điệu tăng nghiêm ngặt hoặc là f đơn điệu giảm nghiêm ngặt trên (a, b). Xét hai số $a < x_1 < x_2 < b$. Giả sử $f(x_1) < f(x_2)$, ta sẽ chứng minh $f(x)$ đồng biến. Giả sử ngược lại, tồn tại $a < \alpha < \beta < b$ mà $f(\alpha) \geqslant f(\beta)$. Do f đơn ánh nên $f(\alpha) > f(\beta)$. Như vậy, ta có $F(x_1, x_2) < 0$ và $F(\alpha, \beta) > 0$, với

$$F(x, y) = f(x) - f(y).$$

Ta sẽ tìm cách nối hai điểm (x_1, x_2) và (α, β) bởi một đường cong. Rõ ràng đường cong đơn giản nhất là một đoạn thẳng nối hai điểm đó:

$$\begin{cases} x = x_1 + t(\alpha - x_1) \\ y = x_2 + t(\beta - x_2) \end{cases} \quad \big(t \in [0, 1]\big).$$

Ta sẽ chứng minh trên đoạn thẳng này có điểm trung gian (y_1, y_2) mà $F(y_1, y_2) = 0$, từ đó suy ra mâu thuẫn. Cụ thể ta làm như sau: Xét hàm số

$$h(t) = f\big(x_1 + t(\alpha - x_1)\big) - f\big(x_2 + t(\beta - x_2)\big).$$

Rõ ràng $h(t)$ liên tục trên đoạn $[0, 1]$. Mà $h(0) = f(x_1) - f(x_2) < 0$, $h(1) = f(\alpha) - f(\beta) > 0$, nên tồn tại $t_0 \in (0, 1)$ sao cho $h(t_0) = 0$, hay

$$f\big(x_1 + t_0(\alpha - x_1)\big) = f\big(x_2 + t_0(\beta - x_2)\big).$$

Do f đơn ánh nên ta có

$$x_1 + t_0(\alpha - x_1) = x_2 + t_0(\beta - x_2),$$

hay
$$(x_1 - x_2)(1 - t_0) + t_0(\alpha - \beta) = 0.$$
Điều này không thể xảy ra do $x_1 < x_2$, $\alpha < \beta$ và $0 \leqslant t_0 \leqslant 1$. Vậy f tăng trên (a, b).

Từ đây, ta thấy rằng với $x > a$ thì $f(y) < f(x)$, $\forall a < y < x$. Suy ra
$$f(a) = \lim_{z \to a^+} f(z) \leqslant f(y) < f(x).$$

Tương tự, ta cũng có $f(x) < f(b)$ với $a < x < b$. Định lý được chứng minh. □

Hệ quả 3. *Giả sử $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ là đơn ánh liên tục, khi đó ta có $f\big((a, b)\big)$ là một khoảng mở. Và đặt $f\big((a, b)\big) = (c, d)$ thì ta có $f^{-1} : (c, d) \to (a, b)$ là hàm liên tục.*

Chứng minh. Do f hoặc là hàm tăng nghiêm ngặt hoặc là hàm giảm nghiêm ngặt nên $f\big((a, b)\big)$ là một khoảng mở, đặt là (c, d). Không mất tính tổng quát, ta giả sử f là hàm giảm. Lấy $x \in (a, b)$. Do f là hàm giảm nên nếu $f(x) < f(y)$ thì $y = f^{-1}\big(f(y)\big) < x = f^{-1}\big(f(x)\big)$, suy ra f^{-1} cũng là hàm giảm. Bây giờ, xét $\varepsilon > 0$ cho trước. Đặt $\varepsilon > \beta > 0$ và $(x - \beta, x + \beta) \subset (a, b)$ thì ta có $f(x) \in \big(f(x + \beta), f(x - \beta)\big)$. Gọi
$$\delta = \min\big\{f(x) - f(x + \beta), f(x - \beta) - f(x)\big\}.$$

Khi đó, nếu $\big|f(z) - f(x)\big| < \varepsilon$ thì ta suy ra
$$z = f^{-1}\big(f(z)\big) \in (x - \beta, x + \beta) \subseteq (x - \varepsilon, x + \varepsilon).$$

Và do đó
$$\big|f^{-1}\big(f(z)\big) - x\big| = \big|f^{-1}f(z) - f^{-1}\big(f(x)\big)\big| < \varepsilon.$$
Điều này chứng tỏ hàm ngược liên tục tại $f(x)$. □

Nhận xét. Ngoài ra, ta có thể chứng minh theo ngôn ngữ về dãy như sau: Cho $y_0 \in (c, d)$ và xét dãy số $\{y_n\}$ trong (c, d) sao cho $y_n = f(x_n) \to y_0$ $(a < x_n < b)$. Ta cần chứng minh
$$x_n = f^{-1}(y_n) \to x_0 = f^{-1}(y_0).$$

Giả sử ngược lại $x_n \not\to x_0$. Do dãy $\{x_n\}$ bị chặn nên tồn tại dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ về $c \neq x_0$, $(c \in [a, b])$. Vì $x_{n_k} \to c$ nên $f(x_{n_k}) \to f(c)$ do f liên tục. Suy ra $y_{n_k} \to f(c)$ và do đó $f(c) = y_0$. Vậy $c = f^{-1}(y_0) = x_0$, mâu thuẫn. Tóm lại, $f^{-1}(x)$ là hàm liên tục.

Định lý 10 (Điểm cố định Knaster). *Cho ánh xạ $f : [0, 1] \to [0, 1]$ là một ánh xạ tăng. Khi đó, f có ít nhất một điểm cố định (tức là tồn tại $x_0 \in [0, 1]$ sao cho $f(x_0) = x_0$).*

Chứng minh. Xét tập $A = \big\{x \in [0, 1] \mid f(x) \geqslant x\big\} \subset [0, 1]$. Vì $f : [0, 1] \to [0, 1]$ nên
$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Nói riêng $f(0) \geqslant 0$, hay $0 \in A$. Vì vậy $A \neq \varnothing$ và bị chặn trên bởi 1 nên theo tồn tại $\sup A$. Rõ ràng $0 \leqslant \sup A \leqslant 1$. Đặt $x_0 = \sup A$, ta sẽ chứng minh
$$f(x_0) = x_0.$$

Thật vậy giả sử $f(x_0) \neq x_0$. Khi đó ta có hai trường hợp xảy ra:

- $x_0 < f(x_0) \leqslant 1$. Chọn $x_1 = \frac{1}{2}[x_0 + f(x_0)] \subset (x_0, f(x_0)) \subset [0, 1]$ thì do f tăng nên

$$f(x_1) \geqslant f(x_0) > x_1.$$

  Từ đây suy ra $x_1 \in A$ và $x_1 > x_0 = \sup A$, vô lý.

- $0 \leqslant f(x_0) < x_0 \leqslant 1$. Đặt $\varepsilon = x_0 - f(x_0) > 0$, khi đó theo tính chất của supremum thì tồn tại $x_\varepsilon \in A$ sao cho $x_\varepsilon > x_0 - \varepsilon = f(x_0)$. Vì $x_\varepsilon \in A$ nên ta có

$$f(x_\varepsilon) \geqslant x_\varepsilon > f(x_0).$$

  Mặt khác, do f là hàm tăng và $x_\varepsilon \leqslant x_0$ nên

$$f(x_\varepsilon) \leqslant f(x_0).$$

  Hai kết quả trên mâu thuẫn với nhau.

Vậy ta phải có $f(x_0) = x_0$. □

Chú ý. Khi áp dụng các định lý trung bình ta thường hay phải dùng hàm phụ, với lưu ý sau

- $(f \cdot e^{ax})' = (f' + af)e^{ax}$;
- $(f \cdot e^{-ax})' = (f' - af)e^{-ax}$;
- $\left[f \cdot (\cos ax + \sin ax)\right]' = (f' + af)\cos ax + (f' - af)\sin ax.$

2 Các bài tập vận dụng

2.1 Bài tập vận dụng các định lý Rolle, Lagrange và Cauchy

2.1.1 Phần bài tập cơ bản

Bài toán 1. *Chứng minh rằng nếu f liên tục trong khoảng đóng $[a, b]$, khả vi trên khoảng mở (a, b) và $f(a) = f(b) = 0$ thì với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho*

$$\alpha f(x_0) + f'(x_0) = 0.$$

Chứng minh. Xét hàm phụ $h(x) = e^{\alpha x} f(x)$ với $x \in [a, b]$. Rõ ràng h thỏa mãn điều kiện của định lý Rolle, do đó tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho

$$0 = h'(x_0) = \left[\alpha f(x_0) + f'(x_0)\right] e^{e x_0}.$$

Từ đây ta có

$$\alpha f(x_0) + f'(x_0) = 0.$$

Bài toán được chứng minh □

Bài toán 2. *Cho f và g là các hàm liên tục trên khoảng đóng $[a, b]$ và khả vi trên khoảng mở (a, b). Giả sử $f(a) = f(b) = 0$, chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho*

$$g'(x_0) f(x_0) + f'(x_0) = 0.$$

Chứng minh. Xét hàm phụ $h(x) = e^{g(x)}f(x)$ với $x \in [a, b]$. Vì h thỏa mãn điều kiện của định lý Rolle nên tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho

$$0 = h'(x_0) = \left[g'(x_0)f(x_0) + f'(x_0)\right]e^{g(x_0)}.$$

Do $e^{g(x_0)} > 0$ nên ta có

$$g'(x_0)f(x_0) + f'(x_0) = 0.$$

Đó chính là điều phải chứng minh. □

Bài toán 3. *Cho f là hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$, $a > 0$ và khả vi trên khoảng mở (a, b). Chứng minh rằng nếu $\frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b}$ thì tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho*

$$x_0f'(x_0) = f(x_0).$$

Chứng minh. Đặt $h(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in [a, b]$. Dễ thấy h thỏa mãn điều kiện của định lý Rolle, do đó tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho

$$0 = \frac{h(b) - h(a)}{b - a} = h'(x_0) = \frac{f'(x_0)x_0 - f(x_0)}{x_0^2},$$

hay

$$f'(x_0)x_0 - f(x_0) = 0.$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Bài toán 4. *Giả sử f liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b). Chứng minh rằng nếu*

$$f^2(b) - f^2(a) = b^2 - a^2,$$

thì phương trình $f'(x)f(x) = x$ có ít nhất một nghiệm trong (a, b).

Chứng minh. Ta có $h(x) = f^2(x) - x^2$, $x \in [a, b]$ thỏa mãn điều kiện của định lý Rolle. Do đó, tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho

$$0 = \frac{h(b) - h(a)}{b - a} = h'(x_0) = 2f'(x_0)f(x_0) - 2x_0,$$

từ đây suy ra

$$f'(x_0)f(x_0) = x_0.$$

Điều này chứng tỏ phương trình $f'(x)f(x) = x$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (a, b)$. □

Bài toán 5. *Cho f và g là các hàm liên tục, dương trên khoảng đóng $[a, b]$ và khả vi trên khoảng mở (a, b). Chứng minh rằng nếu $f(a)g(b) = f(b)g(a)$ thì tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho*

$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \frac{g'(x_0)}{g(x_0)}.$$

Chứng minh. Xét hàm số $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ với $x \in [a, b]$. Từ giả thiết ta có $h(a) = h(b)$, do đó h thỏa mãn điều kiện của định lý Rolle, suy ra tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho $h'(x_0) = 0$, hay

$$\frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} = 0.$$

Do $g^2(x_0) > 0$ nên ta có

$$f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0) = 0,$$

hay

$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \frac{g'(x_0)}{g(x_0)}.$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Bài toán 6. *Cho hàm số f liên tục trên khoảng đóng $[a, b]$ $(0 < a < b)$ và khả vi trên khoảng mở (a, b). Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho*

$$\frac{bf(a) - af(b)}{b-a} = f(x_0) - x_0 f'(x_0).$$

Chứng minh. Sử dụng định lý giá trị trung bình tổng quát cho hai hàm số $\frac{f(x)}{x}$ và $\frac{1}{x}$ trên $[a, b]$, ta suy ra tồn tại $x_0 \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{bf(a) - af(b)}{b-a} = \frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{\frac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{x_0^2}}{-\frac{1}{x_0^2}} = f(x_0) - x_0 f'(x_0).$$

Đây chính là kết quả cần chứng minh. □

Bài toán 7. *Cho hàm $f : [0, 1] \to [0, 1]$ liên tục, khả vi trong khoảng $(0, 1)$ và $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Chứng minh rằng tồn tại hai số thực $a, b \in (0, 1)$ với $a \neq b$ sao cho*

$$f'(a)f'(b) = 1.$$

Chứng minh. Xét hàm số $g(x) = f(x) + x - 1$ với $x \in [0, 1]$. Dễ thấy $g(x)$ liên tục trên đoạn $[0, 1]$ và khả vi trên khoảng $(0, 1)$. Mặt khác, do $g(0)g(1) = -1 < 0$ nên tồn tại $x_0 \in (0, 1)$ sao cho $g(x_0) = 0$, hay $f(x_0) = 1 - x_0$. Theo định lý Lagrange, tồn tại $a \in (0, x_0)$ sao cho

$$f'(a) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \frac{1 - x_0}{x_0},$$

và tồn tại $b \in (x_0, 1)$ sao cho

$$f'(b) = \frac{f(1) - f(x_0)}{1 - x_0} = \frac{x_0}{1 - x_0}.$$

Từ hai đẳng thức trên, ta suy tồn tại $a, b \in (0, 1)$ sao cho $f'(a)f'(b) = 1$. □

Bài toán 8. *Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$, khả vi trong khoảng $(0, 1)$ và thỏa mãn điều kiện $f(0) = f(1) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho*

$$f'(c) = f(c).$$

Chứng minh. Xét hàm số $g(x) = e^{-x} f(x)$. Ta có

$$g'(x) = [f'(x) - f(x)]e^{-x}.$$

Mặt khác, dễ thấy $g(0) = g(1) = 0$ nên theo định lý Rolle tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $g'(c) = 0$, hay $f'(c) = f(c)$. Đây chính là kết quả cần chứng minh. □

Bài toán 9. *Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x)$ tăng nghiêm ngặt trên đoạn $[a, b]$ với $f(a) = \frac{1}{2}(a-b)$ và $f(b) = \frac{1}{2}(b-a)$. Chứng minh rằng tồn tại ba số thực phân biệt $c_1, c_2, c_3 \in (a, b)$ sao cho*

$$f'(c_1)f'(c_2)f'(c_3) = 1.$$

Chứng minh. Theo định lý Lagrange, tồn tại $c_1 \in (a, b)$ sao cho

$$f'(c_1) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 1. \qquad (1)$$

Bây giờ, xét hàm số $h(x) = f(x) + x - \frac{a+b}{2}$, ta có $h(a)h(b) = -(a-b)^2 < 0$. Do đó tồn tại $x_0 \in (a, b)$, sao cho $h(x_0) = 0$, hay

$$f(x_0) = \frac{a+b}{2} - x_0.$$

Lại theo định lý Lagrange, tồn tại $c_2 \in (a, x_0)$, sao cho

$$f'(c_2) = \frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a} = \frac{b-x_0}{x_0-a}.$$

Tương tự như vậy, ta cũng có tồn tại $c_3 \in (x_0, b)$ sao cho

$$f'(c_3) = \frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0} = \frac{x_0-a}{b-x_0}.$$

Rõ ràng $c_2 \neq c_3$ và

$$f'(c_2)f'(c_3) = 1. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta suy ra tồn tại $c_1, c_2, c_3 \in (a, b)$ sao cho

$$f'(c_1)f'(c_2)f'(c_3) = 1.$$

Mặt khác, có thể thấy rằng ba số này khác nhau từng đôi một. Thật vậy, nếu $c_1 = c_2$ thì ta có $f'(c_1) = f'(c_2) = 1$, suy ra $f'(c_3) = 1$ (do $f'(c_2)f'(c_3) = 1$). Mà $f'(x)$ là hàm đồng biến nên $c_1 = c_2 = c_3$, mâu thuẫn vì $c_2 \neq c_3$. Tương tự, ta cũng có $c_1 \neq c_3$. Vậy c_1, c_2, c_3 phân biệt. Bài toán được chứng minh xong. □

Bài toán 10. *Cho $f(x)$ liên tục trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ và khả vi trong $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ và $f^2(x) + \left[f'(x)\right]^2 \neq 0, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho*

$$\tan c = \frac{f(c)+f'(c)}{f(c)-f'(c)}.$$

Chứng minh. Dễ thấy trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, hàm số $g(x) = f(x)(\cos x + \sin x)$ thỏa mãn các điều kiện của định lý Rolle, suy ra tồn tại $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $g'(c) = 0$, hay

$$\left[f'(c) + f(c)\right]\cos c = \left[f(c) - f'(c)\right]\sin c.$$

Từ đẳng thức trên và từ giả thiết

$$0 \neq f^2(c) + \left[f'(c)\right]^2 = \frac{\left[f(c)+f'(c)\right]^2 + \left[f(c)-f'(c)\right]^2}{2},$$

ta suy ra $f(c) + f'(c) \neq 0$, $f(c) - f'(c) \neq 0$. Và như vậy, ta có thể viết đẳng thức trên lại thành

$$\tan c = \frac{\sin c}{\cos c} = \frac{f(c)+f'(c)}{f(c)-f'(c)}.$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Bài toán 11. *Giả sử f liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b). Chứng minh rằng nếu f không tuyến tính thì tồn tại x_1 và x_2 thuộc khoảng (a, b) sao cho*

$$f'(x_1) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(x_2).$$

Chứng minh. Chú ý rằng hàm tuyến tính $g(x) = mx + n$ có một đặc điểm quan trọng là

$$\frac{g(x)-g(y)}{x-y} = m = \frac{g(x')-g(y')}{x'-y'}, \quad \forall x, y, x', y' \in \mathbb{R}, x \neq y, x' \neq y'.$$

Vì f không tuyến tính nên tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$f(c) < f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)$$

hoặc

$$f(c) > f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a).$$

Chẳng hạn, ta giả sử $f(c) < f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c-a)$. Thế thì

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

Sử dụng định lý giá trị trung bình trên hai đoạn $[a, c]$ và $[c, b]$, ta thấy tồn tại $x_1 \in (a, c)$ và $x_2 \in (c, b)$ sao cho

$$f'(x_1) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}, \quad f'(x_2) = \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

Từ đây, kết hợp với trên, ta suy ra

$$f'(x_1) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(x_2).$$

Đó là điều phải chứng minh. □

Bài toán 12. *Giả sử $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là các số thực thỏa mãn*

$$\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2} + a_n = 0.$$

Chứng minh rằng $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0, 1)$.

Chứng minh. Xét đa thức $Q(x) = \frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^n + \cdots + a_nx$. Dễ thấy $Q(x)$ thỏa mãn điều kiện định lý của Rolle trong đoạn $[0, 1]$ nên tồn tại $x_0 \in (0, 1)$ sao cho $Q'(x_0) = 0$, hay

$$a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x_0 + a_n = 0.$$

Điều này chứng tỏ rằng $P(x)$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (0, 1)$. □

Bài toán 13. *Xét các số thực $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là các số thực thỏa mãn*

$$\frac{a_0}{1} + \frac{2a_1}{2} + \cdots + \frac{2^{n-1}a_{n-1}}{n} + \frac{2^na_n}{n+1} = 0.$$

Chứng minh rằng hàm số $f(x) = a_n\ln^n x + a_{n-1}\ln^{n-1}x + \cdots + a_1\ln x + a_0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(1, e^2)$.

Chứng minh. Xét hàm số

$$h(x) = \frac{a_n}{n+1}\ln^{n+1}x + \frac{a_{n-1}}{n}\ln^n x + \cdots + \frac{a_2}{3}\ln^3 x + \frac{a_1}{2}\ln^2 x + \frac{a_0}{1}\ln x, \quad x \in [1,\, e^2].$$

Dễ thấy $h(x)$ thỏa mãn các điều kiện của định lý Rolle trong $[1,\, e^2]$, do vậy tồn tại $c \in (1,\, e^2)$ sao cho $h'(x_0) = 0$. Mà

$$h'(x_0) = \frac{a_n \ln^n x_0 + a_{n-1}\ln^{n-1} x_0 + \cdots + a_1 \ln x_0 + a_0}{x_0},$$

nên ta có

$$a_n \ln^n x_0 + a_{n-1}\ln^{n-1} x_0 + \cdots + a_1 \ln x_0 + a_0 = 0.$$

Vậy $f(x)$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(1,\, e^2)$. □

Bài toán 14. *Cho f khả vi liên tục trên đoạn $[a,\, b]$ và khả vi cấp hai trên $(a,\, b)$. Giả sử*

$$f(a) = f'(a) = f(b) = 0.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a,\, b)$ sao cho $f''(c) = 0$.

Chứng minh. Sử dụng định lý Rolle đối với f trong $[a,\, b]$, ta có tồn tại $x_0 \in (a,\, b)$ sao cho $f'(x_0) = 0$. Tiếp đó sử dụng định lý Rolle đối với $f'(x)$ trên $[a,\, x_0]$, ta suy ra tồn tại $c \in (a,\, x_0) \subset (a,\, b)$ sao cho $f''(c) = 0$. □

Bài toán 15. *Cho $a \in (0,\, 1)$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0,\, 1]$ thỏa mãn $f(0) = f(1) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $b \in [0,\, 1]$ sao cho hoặc $f(b) = f(b - a)$ hoặc $f(b) = f(b + a - 1)$.*

Chứng minh. Mở rộng hàm $f(x)$ ra toàn trục thực để được hàm tuần hoàn chu kỳ $T = 1$. Do $f(0) = f(1) = 0$ nên hàm mới (vẫn ký hiệu là $f(x)$) liên tục trên $\mathbb{R}$. Xét hàm số

$$g(x) = f(x + a) - f(x).$$

Do f tuần hoàn chu kỳ 1 nên theo các tính chất của tích phân, ta có

$$\frac{G(1) - G(0)}{1 - 0} = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x+a)\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{1+a} f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0,$$

suy ra tồn tại $c \in (0,\, 1)$ sao cho $g(c) = 0$, hay

$$f(c + a) = f(c) = f(c + a - 1).$$

Nếu $c + a \in [0,\, 1]$ thì ta có thể chọn $b = a + c$ để có $f(b) = f(b - a)$. Nếu $c + a > 1$ thì ta có thể chọn $b = c$ để có $b \in [0,\, 1]$ và $f(b) = f(b + a - 1)$. □

2.1.2 Bài tập nâng cao

Bài toán 16. *Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[0,\, 1]$, khả vi trên khoảng $(0,\, 1)$ và thỏa mãn các điều kiện:*

(*a*) $f(0) = f(1) = 1$;

(*b*) $2003f'(x) + 2004f(x) \geqslant 2004,\ \forall x \in (0,\, 1)$.

Lời giải. Xét hàm số $g(x) = e^{kx}[f(x) - 1]$ với $k = \frac{2004}{2003}$. Khi đó từ giả thiết (b) ta có

$$g'(x) = e^{kx}[f'(x) + kf(x) - k] \geqslant 0, \quad \forall x \in (0, 1).$$

Suy ra $g(x)$ đồng biến trên đoạn $[0, 1]$. Mặt khác, theo (a) ta lại có $g(0) = g(1) = 0$. Từ hai điều trên, ta suy ra $g(x) \equiv 0$, $\forall x \in [0, 1]$. Vậy $f(x) \equiv 1$, $\forall x \in [0, 1]$. □

Bài toán 17. *Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x) : [a, b] \to [a, b]$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:*

(a) *$f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $[a, b]$;*

(b) *$f(g(x)) = g(f(x))$, $\forall x \in [a, b]$;*

(c) *Hàm số $f(x)$ đơn điệu*

Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in [a, b]$ sao cho $f(x_0) = g(x_0) = x_0$.

Chứng minh. Giả sử f là hàm đơn điệu tăng (trường hợp f giảm được xét tương tự). Đặt $h(x) = g(x) - x$. Dễ thấy $h(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và

$$h(a) = g(a) - a \geqslant 0, \quad h(b) = g(b) - b \leqslant 0.$$

Do đó tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho $h(c) = 0$, hay $g(c) = c$. Nếu $f(c) = c$ thì ta có ngay điều cần chứng minh nên chỉ cần xét $f(c) \neq c$. Đặt $x_1 = f(c)$, $x_2 = f(x_1)$, $\ldots$, $x_n = f(x_{n-1})$. Rõ ràng $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu và bị chặn trong $[a, b]$ nên hội tụ. Đặt $\lim x_n = x_0 \in [a, b]$ thì ta có

$$g(x_1) = g(f(c)) = f(g(c)) = f(c) = x_1.$$

Giả sử $g(x_k) = x_k$ với $k \geqslant 1$. Bằng phương pháp quy nạp, ta chứng minh được $g(x_n) = x_n$ với mọi $n \geqslant 1$. Do $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm liên tục nên ta có

$$\lim x_n = \lim f(x_{n-1}) = f(x_0), \quad \lim x_n = \lim g(x_n) = g(x_0).$$

Vậy $f(x_0) = g(x_0) = x_0$. □

Bài toán 18. *Chứng minh rằng không tồn tại hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn*

$$f(x + 2002)\left[f(x) + \sqrt{2003}\right] = -2004, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh. Giả sử tồn tại hàm $f(x)$ thỏa mãn

$$f(x + 2002)\left[f(x) + \sqrt{2003}\right] = -2004, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Khi đó $f(x) \neq 0$ và $f(x) \neq -\sqrt{2003}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do $f(x)$ liên tục nên chỉ có thể xảy ra một trong ba trường hợp: $\mathrm{Im} f \subset \left(-\infty, -\sqrt{2003}\right)$, $\mathrm{Im} f \subset \left(-\sqrt{2003}, 0\right)$ và $\mathrm{Im} f \subset (0, +\infty)$.

- Với $\mathrm{Im} f \subset \left(-\infty, -\sqrt{2003}\right)$, thì vế trái của (1) $> 0 > -2004$, vô lý.
- Với $\mathrm{Im} f \subset (0, +\infty)$, thì vế trái của (1) $> 0 > -2004$, vô lý.
- Trong trường hợp $\mathrm{Im} f \subset \left(-\sqrt{2003}, 0\right)$, ta có $-\sqrt{2003} < f(x) < 0$ và

$$0 < f(x) + \sqrt{2003} < \sqrt{2003}.$$

  Khi đó vế trái của (1) có trị tuyệt đối nhỏ hơn 2003, vô lý.

Vậy không tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài toán 19. *Chứng minh rằng với mọi $\alpha \leqslant 3$, ta có*

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\alpha} \geqslant \cos x, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Chứng minh. Với $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ thì ta có $0 < \sin x < x$ nên $0 < \frac{\sin x}{x} < 1$, từ đó suy ra

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\alpha} \geqslant \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{3}, \quad \forall \alpha \leqslant 3.$$

Như vậy, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức cho $\alpha = 3$, và trong trường hợp này bất đẳng thức của ta có thể viết lại thành

$$\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} \geqslant x, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x$ trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ta có

$$f'(x) = \frac{2\cos^2 x - 3\cos x\sqrt[3]{\cos x} + 1}{3\cos x\sqrt[3]{\cos x}}.$$

Ta sẽ chứng minh

$$f'(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right). \tag{1}$$

Đặt $t = \cos x$, $0 < t \leqslant 1$ thì bất đẳng thức trên tương đương với

$$g(t) = 2t^2 - 3t\sqrt[3]{t} + 1 \geqslant 0.$$

Ta có $g'(t) = 4\left(t - \sqrt[3]{t}\right) \leqslant 0$, $\forall t \in (0, 1]$ nên $g(t)$ là hàm nghịch biến trên $(0, 1]$ và

$$g(t) \geqslant g(1) = 0, \quad \forall t \in (0, 1].$$

Vậy (1) đúng, suy ra $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Từ đây, ta có

$$f(x) \geqslant f(0) = 0, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Bài toán được chứng minh. □

Bài toán 20. *Cho $f(x)$ khả vi trên $[a, b]$ thỏa mãn $f(a) = f(b) = 0$ và $f(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$. Chứng minh rằng tồn tại dãy $\{x_n\} \subset (a, b)$ sao cho*

$$\lim \frac{f'(x_n)}{(\sqrt[n]{e} - 1)\, f(x_n)} = 2002.$$

Chứng minh. Với mỗi $n = 1, 2, \ldots$, xét hàm số $g_n(x) = e^{-\frac{2002x}{n}} f(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Rõ ràng $g_n(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a, b]$, khả vi trên khoảng (a, b) và $g_n(a) = g_n(b) = 0$. Theo định lý Rolle, tồn tại $x_n \in (a, b)$ thỏa mãn điều kiện $g_n'(x_n) = 0$. Ta sẽ chứng minh dãy $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Thật vậy, từ

$$g_n'(x_n) = -\frac{2002}{n} e^{-\frac{2002x}{n}} f(x_n) + e^{-\frac{2002x}{n}} f'(x_n) = 0,$$

ta suy ra

$$\frac{f'(x_n)}{f(x_n)} = \frac{2002}{n}.$$

Và do đó $\lim \frac{f'(x_n)}{\left[\sqrt[n]{e} - 1\right] f(x_n)} = \lim \frac{2002}{n(e^{1/n} - 1)} = 2002$ (vì $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$). □

Bài toán 21. *Xác định tất cả các hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:*

(a) $f(x) \geqslant e^{2004x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

(b) $f(x+y) \geqslant f(x)f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Đặt $f(x) = e^{2004x}g(x)$. Từ (a), ta có $g(x) \geqslant 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Và theo (b) thì

$$e^{2004(x+y)}g(x+y) \geqslant e^{2004x}g(x)e^{2004y}g(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

suy ra

$$g(x+y) \geqslant g(x)g(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Trong bất phương trình này, cho $x = y = 0$, ta được $g(0) \geqslant g^2(0)$, suy ra $0 \leqslant g(0) \leqslant 1$. Nhưng do $g(0) \geqslant 1$ nên $g(0) = 1$. Từ đây suy ra

$$1 = g(0) = g\big(x + (-x)\big) \geqslant g(x)g(-x) \geqslant 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Điều này chỉ xảy ra khi $g(x) \equiv 1$, hay $f(x) = e^{2004x}$. Vậy $f(x) = e^{2004x}$ là hàm số cần tìm. □

Bài toán 22. *Cho hàm số f xác định và có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện*

$$f(x) + f''(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng

$$f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh. Với mỗi $x \in \mathbb{R}$ cố định, xét hàm số

$$g(y) = f'(y)\sin(y-x) - f(y)\cos(y-x).$$

Dễ thấy

$$g'(y) = \big[f''(y) + f(y)\big]\sin(x-y) \geqslant 0, \quad \forall y \in [x,\, x+\pi]$$

và $g'(y)$ bằng 0 tại hữu hạn điểm trên $[x,\, x+\pi]$ nên ta suy ra $g(y)$ không giảm trên $[x,\, x+\pi]$, dẫn tới $g(x) \leqslant g(x+\pi)$, nghĩa là $f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$, ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 23. *Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên đoạn $[a, b]$ và thỏa mãn điều kiện*

$$\big[f(x)\big]^2 + \big[f'(x)\big]^2 > 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

Chứng minh rằng số các nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ trên đoạn $[a, b]$ là hữu hạn.

Chứng minh. Giả sử ngược lại phương trình $f(x) = 0$ có vô số nghiệm $\{x_n\} \subset [a, b]$. Do dãy này bị chặn nên có một dãy con $\{x_{n_k}\} \to \alpha \in [a, b]$. Do $f(x)$ liên tục nên $f(\alpha) = 0$. Mặt khác, từ giả thiết $\big[f(x)\big]^2 + \big[f'(x)\big]^2 > 0$, $\forall x \in [a, b]$, ta có $f'(\alpha) \neq 0$. Từ đó suy ra

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) \neq 0.$$

Điều này chứng tỏ $f(x) \neq 0$ trong một lân cận nào đó của α, mâu thuẫn với giả thiết α là điểm tụ của dãy $\{x_n\}$. □

Bài toán 24. *Cho f là một hàm liên tục trên đoạn $[0, 1]$ và khả vi trên $(0, 1)$. Giả sử rằng $f(0) = f(1) = 0$ và tồn tại $x_0 \in (0, 1)$ sao cho $f(x_0) = 1$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $|f'(c)| > 2$.*

Chứng minh. Giả sử $x_0 \neq \frac{1}{2}$, khi đó một trong hai khoảng $[0,\, x_0]$ và $[x_0,\, 1]$ sẽ có độ dài không vượt quá $\frac{1}{2}$. Giả sử đoạn đó là $[x_0,\, 1]$, sử dụng định lý giá trị trung bình, ta có tồn tại $c \in (x_0,\, 1)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(x_0)}{1 - x_0} = \frac{-1}{1 - x_0},$$

từ đó suy ra $|f'(c)| > 2$.

Xét trường hợp $x_0 = \frac{1}{2}$. Khi đó:

- Nếu f tuyến tính trên đoạn $[0,\, 1]$ thì $f(x) = 2x$. Vì $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ nên tồn tại $x_1 > \frac{1}{2}$ sao cho $f(x_1) > 1$. Trong trường hợp này áp dụng định lý giá trị trung bình trên khoảng $(x_1,\, 1)$, ta có tồn tại $c \in (x_1,\, 1)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(x_1)}{1 - x_1} < \frac{-1}{1 - \frac{1}{2}} = -2,$$

  thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

- Nếu f không tuyến tính thì tồn tại $x_2 \neq \frac{1}{2}$ sao cho $f(x_2) \neq 2x_2$.
  - Nếu $x_2 \in \left(0,\, \frac{1}{2}\right)$ và $f(x_2) > 2x_2$ thì sử dụng định lý giá trị trung bình trên khoảng $(0, x_2)$, ta suy ra ngay điều phải chứng minh. Còn nếu $x_2 \in \left(0,\, \frac{1}{2}\right)$ và $f(x_2) < 2x_2$ thì sử dụng định lý giá trị trung bình cho khoảng $\left(x_2,\, \frac{1}{2}\right)$, ta cũng có ngay điều phải chứng minh.
  - Lý luận giống như trên, ta cũng có kết quả tương tự khi $x_2 \in \left(\frac{1}{2},\, 1\right)$. □

Bài toán 25. *Cho $n \in \mathbb{N}^*$ và $a_k,\, b_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$. Chứng minh rằng phương trình*

$$x + \sum_{k=1}^{n} (a_k \sin kx + b_k \cos kx) = 0$$

có nghiệm trong khoảng $(-\pi,\, \pi)$.

Chứng minh. Xét hàm số

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{a_k}{k} \cos kx + \frac{b_k}{k} \sin kx\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ta có

$$F(-\pi) = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[-\frac{a_k}{k}(-1)^k\right], \quad F(\pi) = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[-\frac{a_k}{k}(-1)^k\right],$$

suy ra $F(-\pi) = F(\pi)$. Mặt khác, dễ thấy $F(x)$ liên tục và khả vi trên $[-\pi,\, \pi]$. Do đó, theo định lý Rolle, tồn tại $x_0 \in (-\pi,\, \pi)$ sao cho $F'(x_0) = 0$. Mà

$$F'(x) = x + \sum_{k=1}^{n} (a_k \sin kx + b_k \cos kx),$$

nên ta có

$$x_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \sin kx_0 + b_k \cos kx_0) = 0.$$

Từ đây suy ra điều phải chứng minh. □

Bài toán 26. *Cho hàm số $f : [a, b] \to [a, b]$ $(a < b)$ liên tục và thỏa mãn điều kiện:*

$$\left|f(x) - f(y)\right| < |x - y|, \quad \forall x, y \in [a, b], x \neq y.$$

Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ có duy nhất một nghiệm thuộc $[a, b]$.

Chứng minh. Xét hàm số $g(x) = \left|f(x) - x\right|$. Dễ thấy $g(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$, do đó tồn tại $x_0 \in [a, b]$ sao cho $g(x_0) = \min_{x\in[a,b]} g(x)$. Ta sẽ chứng minh

$$g(x_0) = 0.$$

Giả sử $g(x_0) \neq 0$ thì $f(x_0) \neq x_0$. Từ giả thiết, ta có $\left|f\big(f(x_0)\big) - f(x_0)\right| < \left|f(x_0) - x_0\right|$, suy ra

$$g\big(f(x_0)\big) < g(x_0).$$

Điều này mâu thuẫn với giả sử $g(x_0)$ là giá trị nhỏ nhất của hàm $g(x)$ trên đoạn $[a, b]$. Vậy $g(x_0) = 0$, hay $f(x_0) = x_0$. Từ đây suy ra x_0 là một nghiệm của phương trình $f(x) = x$.

Giả sử phương trình $f(x) = x$ còn có một nghiệm khác $x_1 \neq x_0$ và $x_1 \in [a, b]$. Ta có $x_1 \neq x_0$ và $x_0, x_1 \in [a, b]$ nên

$$\left|f(x_1) - f(x_0)\right| < |x_1 - x_0|. \tag{1}$$

Mặt khác, do x_0 và x_1 là nghiệm của phương trình $f(x) = x$ nên

$$\left|f(x_1) - f(x_0)\right| = |x_1 - x_0|. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra mâu thuẫn. Vậy, phương trình $f(x) = x$ chỉ có một nghiệm duy nhất trên đoạn $[a, b]$. Chứng minh hoàn tất. □

Bài toán 27. *Cho hàm số $f(x)$ khả vi trên đoạn $[a, b]$ thỏa mãn điều kiện:*

(a) *Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên đoạn $[a, b]$;*

(b) *Với mọi $x \in [a, b]$ thì $\left|f'(x)\right| < \left|f(x)\right|$.*

Chứng minh rằng $f(x) \equiv 0, \forall x \in [a, b]$.

Chứng minh. Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ với $x_0 \in [a, b]$. Theo định lý Lagrange, với mỗi $x \in [a, b]$, ta có tồn tại c sao cho

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0) = f'(c)(x - x_0).$$

Xét khoảng đóng $G = \left[x_0 - \frac{1}{2}, x_0 + \frac{1}{2}\right] \bigcap [a, b]$. Vì $f(x)$ khả vi trên $[a, b]$ nên $f(x)$ đạt cực đại trên đoạn đóng G. Giả sử $\left|f(x_m)\right| = \max_{x\in G} \left|f(x)\right|$, $x_m \in G$. Ta có

$$\left|f(x_m)\right| = \left|f'(c_m)\right||x_m - x_0| \leqslant \left|f(c_m)\right||x_m - x_0| \leqslant \frac{1}{2}\left|f(c_m)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|f(x_m)\right|,$$

từ đó suy ra

$$f(x) \equiv 0, \quad \forall x \in G.$$

Như vậy, nếu tại một điểm trên đoạn $[a, b]$ mà $f(x) = 0$ thì $f(x) = 0$ trên toàn bộ lân cận với bán kính bằng $\frac{1}{2}$ của điểm đó. Bằng việc xét các điểm x_0 khác nhau (mà tại đó $f(x_0) = 0$) lan dần về hai phía của đoạn $[a, b]$ thì sau một số hữu hạn bước ta sẽ được $f(x) = 0$ với mọi $x \in [a, b]$. Bài toán được chứng minh xong. □

Bài toán 28. *Tìm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện:*

(a) $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

Lời giải. Từ (a) ta có $f(nx) \leqslant nf(x), \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$, suy ra $f(x) \leqslant nf\left(\frac{x}{n}\right)$. Dẫn tới

$$\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} \geqslant \frac{f(x)}{x}, \quad \forall x > 0$$

và

$$\frac{f(-x)}{-x} \geqslant \frac{f\left(-\frac{x}{n}\right)}{-\frac{x}{n}}, \quad \forall x > 0.$$

Mặt khác, từ giả thiết ta cũng dễ dàng suy ra $f(0) \geqslant 0$, do đó

$$0 \leqslant f(0) \leqslant f(x) + f(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy với mỗi $x_0 > 0$, ta có

$$\frac{f\left(\frac{x_0}{n}\right)}{\frac{x_0}{n}} \geqslant \frac{f(x_0)}{x_0} \geqslant \frac{f(-x_0)}{-x_0} \geqslant \frac{f\left(-\frac{x_0}{n}\right)}{-\frac{x_0}{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Từ đó suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f\left(\frac{x_0}{n}\right)}{\frac{x_0}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(-\frac{x_0}{n}\right)}{-\frac{x_0}{n}} = 1,$$

và như thế ta có

$$\frac{f(x_0)}{x_0} = \frac{f(-x_0)}{-x_0} = 1, \quad \forall x > 0.$$

Vậy $f(x) = x, \forall x \neq 0$. Bây giờ, chọn $x_0 \neq 0$ thì ta có

$$0 \leqslant f(0) \leqslant f(x_0) + f(-x_0) = x_0 - x_0 = 0,$$

nên $f(0) = 0$. Cuối cùng, ta đi đến kết luận: $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. □

Bài toán 29. *Cho $M > 0$, và hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho*

$$\big|f(x+y) - f(x) - f(y)\big| \leqslant M, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbb{R}$ đều tồn tại giới hạn $\lim_{n\to\infty} \frac{f(nx)}{n}$.

Chứng minh. Ta cố định $x \in \mathbb{R}$ và chứng minh bất đẳng thức sau bằng quy nạp theo $n \in \mathbb{N}$:

$$\big|f(nx) - nf(x)\big| < (n-1)M < nM, \quad \forall n \geqslant 2. \tag{1}$$

Với $n = 2$ thì $\big|f(2x) - 2f(x)\big| = \big|f(2x) - f(x) - f(x)\big| \leqslant M < 2M$ nên bất đẳng thức đúng. Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k - 1$, ta cần chứng minh nó cũng đúng với $n = k$. Thật vậy, từ giả thiết ta có

$$\big|f(mx) - f\big((m-1)x\big) - f(x)\big| \leqslant M, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}|f(kx)-kf(x)| &= \left|\sum_{m=1}^{k}\left[f(mx)-f\big((m-1)x\big)-f(x)\right]\right| \\ &\leqslant \sum_{m=1}^{k}\left|f(mx)-f\big((m-1)x\big)-f(x)\right| \\ &\leqslant M+M+\cdots+M=kM.\end{aligned}$$

Vậy (1) được chứng minh. Từ đây, ta suy ra

$$|f(nmx)-nf(mx)|\leqslant nM,\quad |f(nmx)-mf(nx)|\leqslant mM,\quad \forall x\in\mathbb{R},\ m,\ n\geqslant 2,$$

hay

$$\left|\frac{f(mnx)}{mn}-\frac{f(mx)}{m}\right|\leqslant\frac{M}{m},\quad \left|\frac{f(mnx)}{mn}-\frac{f(nx)}{n}\right|\leqslant\frac{M}{n}.$$

Cộng hai bất đẳng thức trên lại với chú ý rằng

$$\left|\frac{f(mx)}{m}-\frac{f(nx)}{n}\right|\leqslant\left|\frac{f(mnx)}{mn}-\frac{f(mx)}{m}\right|+\left|\frac{f(mnx)}{mn}-\frac{f(nx)}{n}\right|,$$

ta được

$$\left|\frac{f(mx)}{m}-\frac{f(nx)}{n}\right|\leqslant\frac{M}{n}+\frac{M}{m}.$$

Từ đây, với mọi $\varepsilon>0$, chọn $N>\frac{2M}{\varepsilon}$, $N\in\mathbb{N}$ thì với mọi $m,\ n\geqslant N$ ta có

$$\left|\frac{f(mx)}{m}-\frac{f(nx)}{n}\right|\leqslant\frac{M}{n}+\frac{M}{m}\leqslant\frac{2M}{N}<\varepsilon.$$

Điều này chứng tỏ $\left\{\frac{f(nx)}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ là dãy Cauchy, do đó nó hội tụ. □

Bài toán 30. *Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một dãy số thực (a_n) với $a_n\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\cos a_n=a_n^n$. Tìm giới hạn của dãy đó.*

Chứng minh. Xét hàm số $f_n(x)=x^n-\cos x$. Ta có $f_n(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$f_n'(x)=nx^{n-1}+\sin x\geqslant 0,\quad \forall x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right].$$

Suy ra $f_n(x)$ đồng biến trên $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$. Mặt khác, lại có $f_n(0)=-1<0$ và $f_n(1)=1-\cos 1>0$ nên phương trình $f_n(x)=0$ có nghiệm duy nhất $a_n\in(0,\ 1)$, tức là tồn tại duy nhất a_n để

$$\cos a_n=a_n^n.$$

Ta chứng minh (a_n) là dãy tăng. Giả sử ngược lại tồn tại n mà $a_n>a_{n+1}$. Khi đó, do hàm $\cos x$ nghịch biến trên $(0,\ 1)$ nên ta có $\cos a_n<\cos a_{n+1}$, suy ra $a_n^n<a_{n+1}^{n+1}\leqslant a_{n+1}^n$ (do $a_{n+1}\in[0,\ 1]$). Từ đây ta có $a_n<a_{n+1}$, mâu thuẫn với điều giả sử trên. Vậy (a_n) là dãy tăng và bị chặn trên bởi 1, do đó tồn tại $\lim a_n=\alpha$. Mà $a_n=(\cos a_n)^{1/n}$ nên $\alpha=(\cos\alpha)^0=1$. Vậy $\lim a_n=1$. □

Bài toán 31. *Cho số thực $a>2$. Đặt $f_n(x)=a^{10}x^{n+10}+x^n+\cdots+x+1$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$. Chứng minh rằng với mỗi n phương trình $f_n(x)=a$ có đúng một nghiệm $x_n\in(0,\ +\infty)$ và dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n\to\infty$.*

Chứng minh. Đặt $g_n(x) = f_n(x) - a$ thì

$$g_n(x) = a^{10}x^{n+10} + \frac{x^{n+1}-1}{x-1} - a.$$

Ta có $g_n(0) = 1 - a < 0$ và

$$\begin{aligned} g_n\left(\frac{a-1}{a}\right) &= a^{10}\cdot\frac{(a-1)^{n+10}}{a^{n+10}} + \frac{\left(\frac{a-1}{a}\right)^{n+1}-1}{\frac{a-1}{a}-1} - a \\ &= \frac{(a-1)^{n+10}}{a^n} - \frac{(a-1)^{n+1}-a^{n+1}}{a^n} - a \\ &= \frac{(a-1)^{n+1}\left[(a-1)^9-1\right]}{a^n} > 0 \end{aligned}$$

Mặt khác, dễ thấy $g_n(x)$ là một hàm liện tục và đồng biến trên $(0, +\infty)$, do đó với mỗi n phương trình $f_n(x) = a$ có duy nhất một nghiệm $x_n \in \left(0, \frac{a-1}{a}\right)$.

Bây giờ, ta sẽ chứng minh $g_{n+1}(x_n) < g_{n+1}(x_{n+1}) = a$, hay

$$a^{10}x_n^{n+11} + x_n^{n+1} + x_n^n + \cdots + x_n + 1 < a.$$

Mà $x_n^n + \cdots + x_n + 1 = a - a^{10}x_n^{n+10}$ nên bất đẳng thức trên tương đương với

$$a^{10}x_n^{n+11} + x_n^{n+1} < a^{10}x_n^{n+10},$$

hay

$$x_n < \frac{a-1}{a} \text{ (đúng).}$$

Do đó $g_{n+1}(x_n) < g_{n+1}(x_{n+1})$. Mà $g_{n+1}(x)$ là hàm đồng biến trên $(0, +\infty)$ nên ta có $x_{n+1} > x_n$, suy ra (x_n) là dãy tăng. Hơn nữa, nó lại bị chặn trên bởi $\frac{a-1}{a}$. Vậy tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim x_n$. Bài toán được chứng minh xong. □

Bài toán 32. *Cho hàm số $f(x)$ có các tính chất sau:*

(a) $0 < f(x) < 1, \forall x \in \mathbb{R}$;

(b) $f(x+h)\left[1 - f(x)\right] \geqslant \frac{1}{4}, \forall x \in \mathbb{R}, h > 0.$

Tìm $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Lời giải. Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$f(x+h) + \left[1 - f(x)\right] \geqslant 2\sqrt{f(x+h)\left[1-f(x)\right]} \geqslant 1, \quad \forall h > 0.$$

Do đó $f(x+h) \geqslant f(x), \forall h > 0$. Điều này chứng tỏ $f(x)$ đơn điệu tăng và bị chặn trên $\mathbb{R}$ $(f(x) < 1)$, suy ra tồn tại $\lim_{x\to\infty} f(x) = a > 0$. Từ giả thiết $f(x+h)[1 - f(x)] \geqslant \frac{1}{4}$, ta có

$$\lim_{x\to\infty}\left\{f(x+h)\left[1 - f(x)\right]\right\} \geqslant \frac{1}{4},$$

suy ra

$$a(1-a) \geqslant \frac{1}{4}.$$

Mà $a(1-a) - \frac{1}{4} = -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0$, nên ta có $a = \frac{1}{2}$. Vậy $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{2}$. □

Bài toán 33 (Tạp chí AMM). *Tìm tất cả các hàm khả vi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ khả vi hai lần trên khoảng mở chứa 0 và có chính xác một nghiệm thực, ngoài ra $f(1) = 1$ và*

$$f'(f(t)) = 2f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Đặt $g(t) = f(f(t)) - f^2(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Do $f'(f(t)) = 2f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ nên ta có

$$g'(t) = f'(t)f'(f(t)) - 2f(t)f'(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

suy ra g là hàm hằng và do vậy $g(t) = g(1) = f(f(1)) - f^2(1) = f(1) - f^2(1) = 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$, hay

$$f(f(t)) = f^2(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Đặt $\mathbb{I} = f(\mathbb{R})$. Khi đó, từ (1), với mọi $x \in \mathbb{I}$, ta có

$$f(x) = x^2. \tag{2}$$

Bây giờ nếu r là nghiệm thực duy nhất của f thì theo (1) ta có

$$f(0) = f(f(r)) = f^2(r) = 0.$$

Do vậy 0 là nghiệm thực duy nhất của f và do $\mathbb{I}$ là một khoảng chứa 0 và 1 ($1 \in \mathbb{I}$ vì $f(1) = 1$) nên $[0,\, 1] \subseteq \mathbb{I}$, suy ra $m = \sup \mathbb{I} \geqslant 1$. Mặt khác, từ (2) ta suy ra rằng nếu $s \in \mathbb{I}$ thì $s^{2^n} \in \mathbb{I}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, do đó nếu $m < +\infty$ thì m chỉ có thể là 1. Và như vậy, ta sẽ có $f(x) \leqslant 1$ và với mỗi $x > 1$ thì

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - 1}{x - 1} \leqslant 0 < 2 = 2f(1) = f'(f(1)) = f'(1).$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết f khả vi. Vậy $m = +\infty$, hay

$$[0,\, +\infty) \subseteq \mathbb{I}, \tag{3}$$

từ đây suy ra

$$f(t) = t^2, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Bây giờ, nếu $y < 0$ và $y = f(z)$ với một giá trị $z \in \mathbb{R}$, thì ta có $z \notin \mathbb{I}$ (theo (2)), suy ra $z < 0$ (theo (3)). Lại có $f(y) = y^2 > 0$ nên $f(z) < 0 < f(y)$, mà $z \neq y$ nên tồn tại một nghiệm thực (khác 0) của f nằm giữa z và y, mâu thuẫn. Vậy $\mathbb{I} \subseteq [0,\, +\infty)$. Kết hợp với (3), ta được $\mathbb{I} = [0,\, +\infty)$ và do đó

$$f(t) > 0, \quad \forall t \neq 0.$$

Cuối cùng như ta biết f là hàm dương trên $(-\infty,\, 0)$, khả vi trên $(-\infty,\, 0]$ và khả vi hai lần trên $(-\varepsilon,\, 0]$ với $\varepsilon > 0$. Do vậy

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & t \geqslant 0 \\ g(t), & t < 0 \end{cases}$$

trong đó $g : (-\infty,\, 0] \to [0,\, +\infty)$ là hàm khả vi sao cho $g(0) = g'(0) = 0$, $g''(0) = 2$, $g(t) > 0$, $\forall t < 0$ và $g_{(-\varepsilon,0]}$ khả vi hai lần với $\varepsilon > 0$. Có rất nhiều hàm g thỏa mãn các điều kiện như vậy, ví dụ $g(t) = t(1 - e^{-t})$, hay $g(t) = t^2 e^{At}, \ldots$ □

Bài toán 34. *Cho $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ ($a_0 \neq 0$) là đa thức bậc n với các hệ số thực. Giả sử $P_n(x)$ chỉ có nghiệm thực, chứng minh rằng đạo hàm mọi cấp của $P_n(x)$ cũng chỉ có nghiệm thực.*

Chứng minh. Giả sử $P_n(x)$ có n nghiệm thực khác nhau $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Khi đó $P_n'(x)$ là đa thức bậc $n-1$. Hơn nữa, theo định lý Rolle, ta thấy nó có $n-1$ nghiệm $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ với $c_1 \in (x_1, x_2), \ldots, c_{n-1} \in (x_{n-1}, x_n)$. Như vậy $c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1}$ là tất cả các nghiệm của $P_n'(x)$. Tương tự với các đạo hàm tiếp theo.

Bây giờ, giả sử $P_n(x)$ có các nghiệm $x_1 < x_2 < \cdots < x_l$ bội $k_1, k_2, \ldots, k_l$ tương ứng. Khi đó, do giả thiết $P_n(x)$ chỉ có nghiệm thực nên ta có

$$P_n(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \cdots (x - x_l)^{k_l},$$

với $x_1 < x_2 < \cdots < x_l$, $k_i \in \mathbb{N}^*$, $k_1 + k_2 + \cdots + k_l = n$.

Theo định lý Rolle, $P_n'(x)$ có $l-1$ nghiệm $c_1, c_2, \ldots, c_{l-1}$ với $c_1 \in (x_1, x_2), \ldots, c_{l-1} \in (x_{l-1}, x_l)$. Mặt khác, ta cũng có thể viết $P_n(x) = (x - x_1)^{k_1}Q(x)$ với $Q(x)$ là đa thức, nên

$$P_n'(x) = (x - x_1)^{k_1 - 1}\left[k_1 Q(x) + Q'(x)\right], \quad k_1 \geqslant 1.$$

Suy ra x_1 là nghiệm bội của $P_n'(x)$ với số bội ít nhất là $k_1 - 1$. Tương tự cho $x_2, \ldots, x_l$. Vì

$$(k_1 - 1) + (k_2 - 1) + \cdots + (k_l - 1) + (l - 1) = n - 1,$$

nên x_i là nghiệm bội của $P_n'(x)$ với số bội đúng bằng $k_i - 1$.

Tóm lại, đa thức $P_n'(x)$ có nghiệm là nghiệm bội của $P_n(x)$ với số bội bớt đi 1 và các nghiệm đơn mới nằm giữa các nghiệm của $P_n(x)$. Tương tự cho các đạo hàm cấp cao. □

Nhận xét. Tất cả các nghiệm của đạo hàm của $P_n(x)$ đều nằm trong $[x_1, x_l]$.

Bài toán 35. *Chứng minh rằng tất cả các nghiệm của đa thức Lagrange*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left((x^2 - 1)^n\right)$$

đều thực và nằm trong $(-1, 1)$. *(Ở đây* $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x)$ *là đạo hàm cấp* n *của hàm số* $f(x)$.*)*

Chứng minh. Xét

$$f(x) = \frac{1}{2^n n!}(x^2 - 1)^n = \frac{1}{2^n n!}(x - 1)^n(x + 1)^n.$$

Nhận thấy $f(x)$ là đa thức bậc $2n$, và cả hai điểm $x = 1$, $x = -1$ đều là nghiệm bội n. Từ kết quả bài tập trên, ta suy ra $P_n(x) = f^{(n)}(x)$ có n nghiệm thực phân biệt trong $(-1, 1)$ (lưu ý ± 1 không là nghiệm của $f^{(n)}(x)$) và $P_n(x)$ lại là đa thức bậc n nên n nghiệm đó là toàn bộ các nghiệm của $P_n(x)$. □

Bài toán 36. *Cho* $P(x)$ *là đa thức đa thức hệ số thực bậc* n $(n \geqslant 1)$ *và có* m *nghiệm thực (kể cả nghiệm bội). Chứng minh rằng đa thức* $Q(x) = (x^2 + 1)P(x) + P'(x)$ *có ít nhất* m *nghiệm thực (kể cả nghiệm bội).*

Chứng minh. Do $e^{\frac{x^3}{3} + 3} > 0$ nên phương trình $Q(x) = 0$ tương đương với

$$e^{\frac{x^3}{3} + x}\left[(x^2 + 1)P(x) + P'(x)\right] = 0,$$

hay

$$\left[e^{\frac{x^3}{3} + x}P(x)\right]' = 0. \tag{1}$$

Số nghiệm thực của phương trình $e^{x^3/3 + x}P(x) = 0$ là m. Do đó, theo định lý Rolle, phương trình (1) có ít nhất $m - 1$ nghiệm, suy ra $Q(x)$ cũng có ít nhất $m - 1$ nghiệm.

Bây giờ, ta sẽ chứng minh $Q(x) = 0$ có ít nhất m nghiệm thực. Có hai trường hợp xảy ra:

- *Với m chẵn.* Nếu n lẻ thì $P(x)$ là đa thức bậc lẻ có số nghiệm thực kể cả bội là lẻ, suy ra m lẻ, mâu thuẫn. Vậy n phải là số chẵn. Từ đó, $Q(x)$ là đa thức bậc chẵn, suy ra số nghiệm thực kể cả bội của nó là chẵn. Theo trên, nó có ít nhất $m-1$ nghiệm, trong khi $m-1$ lẻ. Vậy $Q(x)$ có ít nhất m nghiệm.
- *Với m lẻ.* Nếu n chẵn thì $P(x)$ là đa thức bậc chẵn, nó có số chẵn nghiệm thực kể cả nghiệm bội, tức m là số chẵn, vô lý. Vậy n phải lẻ, suy ra $Q(x)$ là một đa thức bậc $n+2$ là một số lẻ. Do đó nó có số lẻ các nghiệm. Lại biết $Q(x)$ có ít nhất $m-1$ (là một số chẵn) nghiệm thực. Vậy $Q(x)$ có ít nhất m nghiệm thực. □

Bài toán 37. *Cho n là số nguyên dương bất kỳ và $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ là $n+1$ số thực tùy ý. Xét các số thực $k_0, k_1, \ldots, k_n$ với $k_n \neq 0$. Chứng minh rằng phương trình*

$$k_0x^{a_0} + k_1x^{a_1} + \cdots + k_nx^{a_n} = 0$$

có nhiều nhất n nghiệm dương.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp. Lưu ý rằng ta chỉ xét với $x > 0$. Với $n = 1$, phương trình đã cho trở thành

$$k_0x^{a_0} + k_1x^{a_1} = 0,$$

tương đương

$$-\frac{k_0}{k_1} = x^{a_1-a_0}.$$

Rõ ràng phương trình cuối này có nhiều nhất là một nghiệm dương (khi $-\frac{k_0}{k_1} > 0$).

Giả sử khẳng định đúng với số nguyên dương n. Ta cần chứng minh nó cũng đúng cho $n+1$, tức phương trình

$$l_0x^{b_0} + l_1x^{b_1} + \cdots + l_nx^{b_n} + l_{n+1}x^{b_{n+1}} = 0$$

(với $b_0 < b_1 < \cdots < b_{n+1}$ và $l_0, l_1, \ldots, l_{n+1} \in \mathbb{R}$, $l_{n+1} \neq 0$) có nhiều nhất $n+1$ nghiệm dương.

Phương trình này tương đương với

$$x^{b_0}(l_0 + l_1x^{b_1-b_0} + l_2x^{b_2-b_0} + \cdots + l_{n+1}x^{b_{n+1}-b_0}) = 0,$$

hay

$$l_0 + l_1x^{b_1-b_0} + l_2x^{b_2-b_0} + \cdots + l_{n+1}x^{b_{n+1}-b_0} = 0.$$

Đặt $f(x) = l_0 + l_1x^{b_1-b_0} + l_2x^{b_2-b_0} + \cdots + l_{n+1}x^{b_{n+1}-b_0}$. Dễ thấy $f(x)$ khả vi trên $\mathbb{R}^+$ và

$$f'(x) = l_1(b_1-b_0)x^{b_1-b_0-1} + \cdots + l_{n+1}(b_{n+1}-b_0)x^{b_{n+1}-b_0-1}.$$

Do $b_1 - b_0 - 1 < \cdots < b_{n+1} - b_0 - 1$ và $l_{n+1}(b_{n+1} - b_0) \neq 0$ nên theo giả thiết quy nạp, phương trình $f'(x) = 0$ có không quá n nghiệm dương, ký hiệu là $x_1, x_2, \ldots, x_N$ với $0 < x_1 < \cdots < x_N$, $N \leqslant n$. Sử dụng định lý Rolle, ta suy ra phương trình $f(x) = 0$ chỉ có thể có nhiều nhất một nghiệm trên mỗi nửa khoảng $(0, x_1]$; $(x_1, x_2]$, ..., $(x_N, +\infty)$. Nói cách khác, $f(x) = 0$ có nhiều nhất $N + 1 \leqslant n + 1$ nghiệm dương. Bài toán được chứng minh xong. □

Bài toán 38. *Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ và thỏa mãn $f(0) = f(1)$. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, tồn tại $c \in [0, 1]$ sao cho*

$$f(c) = f\left(c + \frac{1}{n}\right).$$

Chứng minh. Xét $g(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$. Dễ thấy $g(x)$ liên tục trên $\left[0, \frac{n-1}{n}\right]$. Ta có

$$g(0) + g\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + g\left(\frac{n-1}{n}\right) = f(1) - f(0) = 0.$$

Do đó, tồn tại $0 \leqslant i, j \leqslant n-1$ sao cho $g\left(\frac{i}{n}\right) \leqslant 0$, $g\left(\frac{j}{n}\right) \geqslant 0$. Vì $g(x)$ liên tục nên tồn tại c ở giữa $\frac{i}{n}$, $\frac{j}{n}$ sao cho $g(c) = 0$, từ đó ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 39. *Tồn tại hay không hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn nếu x vô tỉ thì $f(x)$ hữu tỉ, còn khi x hữu tỉ thì $f(x)$ nhận giá trị vô tỉ?*

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn yêu cầu của đề bài. Đặt $g(x) = f(x) - x$ thì ta có $g(x)$ liên tục và chỉ nhận giá trị vô tỉ. Nếu $g(x)$ nhận ít nhất hai giá trị g_1, g_2 $(g_1 < g_2)$ thì theo tính chất trù mật của tập số thực, tồn tại số hữu tỉ g_0 sao cho

$$g_1 < g_0 < g_2.$$

Từ định lý về giá trị trung gian, ta suy ra $g(x)$ nhận cả giá trị g_0, mâu thuẫn. Vậy $g(x) = c$, hay $f(x) = x + c$ với c là hằng số vô tỉ, suy ra $f(c) = 2c$. Tuy nhiên điều này không thể xảy ra $f(c)$ là số hữu tỉ, trong khi đó $2c$ vô tỉ. Vậy không tồn tại hàm f như yêu cầu của đề bài. □

Bài toán 40. *Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ khả vi hai lần và $f^2(0) + \left[f'(0)\right]^2 = 4$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho*

$$f(x_0) + f''(x_0) = 0.$$

Chứng minh. Đặt $g(x) = f^2(x) + \left[f'(x)\right]^2$ thì theo giả thiết ta có $g(0) = 4$. Do f liên tục trên đoạn $[0, 2]$ và khả vi trên $(0, 2)$ nên theo định lý Lagrange, tồn tại $a \in (0, 2)$ sao cho

$$f'(a) = \frac{f(2) - f(0)}{2}.$$

Vì $\left|f(x)\right| \leqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}$ nên từ đẳng thức trên ta suy ra được $|f'(a)| \leqslant 1$, suy ra $g(a) \leqslant 2$. Tương tự, ta cũng tìm được trong khoảng $(-2, 0)$ một giá trị b sao cho $g(b) \leqslant 2$. Do hàm $g(x)$ liên tục trên đoạn $[-2, 2]$ nên nó sẽ đạt giá trị lớn nhất tại một điểm nằm trong khoảng $(-2, 2)$. Gọi $g(c) = \max_{x \in [-2, 2]} g(x)$ thì ta có

$$g(c) \geqslant g(0) = 4.$$

Mà $g(c) = f^2(c) + \left[f'(c)\right]^2$ và $f^2(c) \leqslant 1$ nên phải có $\left|f'(c)\right| > 0$. Ta có

$$g'(c) = 0 \Leftrightarrow 2f'(c)\left[f(c) + f''(c)\right] = 0.$$

Do ta vừa chứng tỏ $f'(c) \neq 0$ nên $f(c) + f''(c) = 0$, điều phải chứng minh. □

Bài toán 41. *Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn*

$$f(f(x)) = -x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng $f(x) \leqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh. Xét $x \leqslant 0$, khi đó tồn tại $y \in \mathbb{R}$ sao cho $x = -y^2$ nên theo giả thiết, ta có

$$f(x) = f(-y^2) = f\big(f(f(y))\big) = -\big[f(y)\big]^2 \leqslant 0.$$

Xét $x > 0$, khi đó với mọi $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}^+$ thì $f(x_1) \neq f(x_2)$. Thật vậy, nếu $f(x_1) = f(x_2)$ thì ta có $f\big(f(x_1)\big) = f\big(f(x_2)\big)$, hay $-x_1^2 = -x_2^2$, từ đó suy ra $x_1 = x_2$. Từ đây, kết hợp với giả thiết $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$, ta suy ra f là hàm đơn điệu thực sự trên $\mathbb{R}^+$.

Bây giờ, giả sử $\exists x_0 \in \mathbb{R}^+$ sao cho $f(x_0) > 0$. Khi đó, do f liên tục nên tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho

$$f(x) > 0, \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon,\, x_0 + \varepsilon).$$

Ta biết rằng hợp của hai hàm đơn điệu thực sự là hàm đồng biến, do đó hàm $f\big(f(x)\big)$ là hàm đồng biến trên $(x_0 - \varepsilon,\, x_0 + \varepsilon)$. Mặt khác, theo giả thiết thì $f\big(f(x)\big) = -x^2$ là hàm nghịch biến trên $(x_0 - \varepsilon,\, x_0 + \varepsilon)$. Mâu thuẫn này cho ta điều phải chứng minh. □

Bài toán 42. *Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên khoảng (a, b) sao cho*

$$\big[f(x)\big]^2 = \big[g(x)\big]^2 \neq 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

Chứng minh rằng $f(x) = g(x)$, $\forall x \in (a, b)$ hoặc $f(x) = -g(x)$, $\forall x \in (a, b)$.

Chứng minh. Từ giả thiết suy ra với mọi $x \in (a, b)$, ta có $f(x) = g(x)$ hoặc $f(x) = -g(x)$. Giả sử có $x_0 \in (a, b)$ sao cho $f(x_0) = g(x_0)$. Ta sẽ chứng minh

$$f(x) = g(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

Giả sử ngược lại, tồn tại $x_1 \in (a, b)$, $x_0 \neq x_1$ sao cho $f(x_1) = -g(x_1)$ thì ta có

$$f(x_0)f(x_1) = -g(x_0)g(x_1) \neq 0.$$

Từ đây suy ra:

- Nếu $f(x_0)f(x_1) < 0$ thì do f liên tục nên tồn tại x_2 nằm giữa x_0 và x_1 sao cho $f(x_2) = 0$, mâu thuẫn với giả thiết $f(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$.
- Nếu $f(x_0)f(x_1) > 0$ thì ta có $g(x_0)g(x_1) < 0$ và do đó, tồn tại x_3 nằm giữa x_0 và x_1 sao cho $g(x_3) = 0$, vô lý.

Vậy nếu có $x_0 \in (a, b)$ sao cho $f(x_0) = g(x_0)$ thì $f(x) = g(x)$, $\forall x \in (a, b)$. Tương tự, ta sẽ có $f(x) = -g(x)$, $\forall x \in (a, b)$ nếu có $x_0 \in (a, b)$ mà $f(x_0) = -g(x_0)$. □

Bài toán 43. *Cho hai số thực dương $a < b$ và hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $[a, b]$ sao cho $0 < g(x) < f(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Chứng minh rằng tồn tại $\lambda > 0$ sao cho*

$$(1 + \lambda)g(x) < f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Chứng minh. Xét hàm số $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, ta có liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $h(x) > 1$, $\forall x \in [a, b]$. Suy ra $h(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[a, b]$. Giả sử $h(x_0) = \min_{x \in [a,b]} h(x)$ $(x_0 \in [a, b])$, khi đó ta có $h(x_0) > 1$ và $h(x) \geqslant h(x_0)$, $\forall x \in [a, b]$. Từ đây chọn $\lambda = \frac{h(x_0) - 1}{2}$, thì ta có ngay

$$(1 + \lambda)g(x) = \frac{h(x_0) + 1}{2}g(x) < h(x_0)g(x) \leqslant h(x)g(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Bài toán được chứng minh xong. □

2.2 Bài tập dùng khai triển Taylor

Bài toán 44. *Cho $f(x)$ khả vi cấp hai trên $[0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$ và $|f''(x)| \leqslant A$, $\forall x \in (0, 1)$. Chứng minh rằng*

$$|f'(x)| \leqslant \frac{A}{2}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Chứng minh. Theo công thức khai triển Taylor của hàm $f(x)$ tại x, áp dụng tại 0 và 1 ta có

$$0 = f(0) = f(x) - f'(x)x + \frac{f''(c_1)}{2!}x^2, \quad 0 < c_1 < x$$

và

$$0 = f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + \frac{f''(c_2)}{2!}(1-x)^2, \quad x < c_2 < 1.$$

Trừ hai đẳng thức này theo vế, ta có

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[f''(c_1)x^2 - f''(c_2)(1-x)^2\right],$$

từ đó suy ra

$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}\left[|f''(c_1)|x^2 + |f''(c_2)|(1-x)^2\right] \leqslant \frac{A}{2}(2x^2 - 2x + 1) \leqslant \frac{A}{2}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Bài toán 45. *Cho hàm số $f(x)$ khả vi vô hạn trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện:*

(*a*) *Tồn tại $M > 0$ sao cho $|f^n(x)| \leqslant M$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$;*

(*b*) *$f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.*

Chứng minh rằng $f(x) \equiv 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Chứng minh. Sử dụng định lý Rolle trên các đoạn $[a_1, a_2]$, $[a_2, a_3]$, ..., ta dễ dàng chứng minh khẳng định sau: *Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Giả sử tồn tại dãy đơn điệu $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ hội tụ đến x_0 sao cho $f(a_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, khi đó tồn tại dãy đơn điệu $\{a'_n\}_{n\geqslant 1}$ hội tụ đến x_0 và thỏa mãn điều kiện $f'(a'_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Sử dụng kết quả này cho hàm số $f(x)$ với $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, rồi sau đó áp dụng tiếp với $f'(x)$, $f''(x)$, ..., ta được

$$f(0) = \lim f\left(\frac{1}{n}\right) = 0, \quad f'(0) = \lim f'(a'_n) = 0, \quad f''(0) = \lim f''(a''_n) = 0.$$

Như vậy, $f^{(n)}(0) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Từ đây, sử dụng khai triển Taylor cho hàm $f(x)$ tại điểm $x = 0$, ta được $f(x) \equiv 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Bài toán được chứng minh xong. □

Bài toán 46. *Cho hàm số $f(x)$ khả vi ba lần trên $\mathbb{R}$, đồng thời $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ dương với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng tồn tại $a > 0$ sao cho*

$$f(x) > ax^2, \quad \forall x > 0.$$

Chứng minh. Theo công thức khai triển Taylor tại 0 với $x > 0$, ta có

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(\theta)}{6}x^3, \quad 0 < \theta < x.$$

Từ đó suy ra

$$f(x) > f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 > ax^2,$$

với $a = \frac{f''(0)}{2}$. Đó là điều phải chứng minh. □

Bài toán 47. *Giả sử $P(x)$ là đa thức bậc n sao cho tồn tại $a \in \mathbb{R}$ để $P(a) \geqslant 0$, $P'(a) \geqslant 0$, $\ldots$, $P^{(n)}(a) \geqslant 0$. Chứng minh rằng mọi nghiệm thực của $P(x)$ đều không lớn hơn a.*

Chứng minh. Sử dụng khai triển Taylor cho đa thức $P(x)$ tại a, ta được

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Lưu ý rằng phần dư bằng 0 vì $P^{(n+1)}(x) = 0$. Từ khai triển này, ta thấy ngay khi $x > a$ thì $P(x) > 0$. Vậy $P(x)$ không thể có nghiệm $x > a$. □

Bài toán 48. *Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(0) = f(1) = a$. Chứng minh rằng*

$$\max_{x\in[0,1]} f''(x) \geqslant 8(a-b),$$

trong đó $b = \min_{x\in[0,1]} f(x)$.

Chứng minh. Sử dụng giả thiết và áp dụng định lý Rolle, ta suy ra tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $f'(c) = 0$. Xét khai triển Taylor của hàm $f(x)$ tại điểm c, ta có

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''\big(\theta(x)\big)}{2}(x-c)^2.$$

Thay lần lượt $x = 0$ và $x = 1$ vào đẳng thức trên, ta được

$$a = b + \frac{f''\big(\theta(0)\big)}{2}c^2, \quad a = b + \frac{f''\big(\theta(1)\big)}{2}(1-c)^2,$$

suy ra

$$f''\big(\theta(0)\big) = \frac{2(a-b)}{c^2} \geqslant 0, \quad f''\big(\theta(1)\big) = \frac{2(a-b)}{(1-c)^2} \geqslant 0.$$

Nhân vế với vế hai bất đẳng thức trên, ta thu được

$$f''\big(\theta(0)\big)f''\big(\theta(1)\big) = \frac{4(a-b)^2}{c^2(1-c)^2} \geqslant \frac{4(a-b)^2}{\left[\frac{c+(1-c)}{2}\right]^4} = 64(a-b)^2.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Có thể mở rộng kết quả cho đoạn $[\alpha, \beta]$ bất kỳ, khi ấy ta sẽ có

$$\max_{x\in[\alpha,\beta]} f''(x) \geqslant \frac{8(a-b)^2}{(\alpha-\beta)^2}.$$

Bài toán 49. *Giả sử $P(x)$ là đa thức không có nghiệm thực. Chứng minh rằng đa thức*

$$Q(x) = P(x) + \frac{P''(x)}{2} + \frac{P^{(4)}(x)}{4!} + \cdots$$

cũng không có nghiệm thực.

Chứng minh. Với mỗi $x \in \mathbb{R}$, xét khai triển Taylor tại điểm x, ta có

$$P(x+1) = P(x) + P'(x) + \frac{P''(x)}{2!} + \cdots, \quad P(x-1) = P(x) - P'(x) + \frac{P''(x)}{2!} + \cdots$$

từ đó suy ra

$$\frac{1}{2}\left[P(x+1) + P(x-1)\right] = P(x) + \frac{P''(x)}{2} + \frac{P^{(4)}(x)}{4!} + \cdots = Q(x)$$

Vì $P(x)$ không có nghiệm thực nên nó không đổi dấu trên $\mathbb{R}$, thế thì $\frac{P(x+1)+P(x-1)}{2}$ cũng không đổi dấu trên $\mathbb{R}$. Kết hợp với đẳng thức trên, ta suy ra điều phải chứng minh. □

Bài toán 50. *Giả sử f là hàm khả vi liên tục cấp hai trên $(0, 1)$ và thỏa mãn:*

(a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$;

(a) *Tồn tại $M > 0$ sao cho $(1-x^2)\left|f''(x)\right| \leqslant M$, $\forall x \in (0, 1)$.*

Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)f'(x) = 0$

Chứng minh. Với u, $x \in (0, 1)$, $u > x$, theo công thức khai triển Taylor ta có

$$f(u) = f(x) + f'(x)(u-x) + \frac{1}{2}f''(\xi)(u-x)^2, \quad \xi \in (x, u).$$

Chọn $u = x + \varepsilon(1-x)$ với $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, ta được

$$f(u) - f(x) = \varepsilon(1-x)f'(x) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 f''\big(x + \theta\varepsilon(1-x)\big)(1-x)^2, \quad \theta \in (0, 1).$$

Cho $x \to 1^-$, ta có

$$0 = \lim_{x\to 1^-}\left[(1-x)f'(x) + \frac{1}{2}\varepsilon f''\big(x + \theta\varepsilon(1-x)\big)(1-x)^2\right].$$

Theo định nghĩa giới hạn, nếu $\varepsilon_1 > 0$ thì

$$(1-x)\left|f'(x)\right| \leqslant \varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon\left|f''\big(x + \theta\varepsilon(1-x)\big)\right|(1-x)^2 \leqslant \varepsilon_1 + \frac{1}{2}\frac{M\varepsilon}{(\theta\varepsilon - 1)^2},$$

với x đủ gần 1. Vì ε chọn tùy ý nên $(1-x)\left|f'(x)\right| \leqslant \varepsilon_1$, từ đó suy ra $\lim_{x\to 1^-}(1-x)f'(x) = 0$. □

BẤT PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Nguyễn Trọng Tuấn[1]

Bất phương trình hàm là một vấn đề khá lạ ngay cả với các học sinh chuyên Toán. Cũng như chứng minh bất đẳng thức khó hơn chứng minh đẳng thức, giải bất phương trình khó hơn giải phương trình, phép giải bất phương trình hàm cũng khó hơn phép giải phương trình hàm. Bài viết này trình bày một số kỹ thuật giải bất phương trình hàm thông dụng.

1 Sử dụng phép thế

Cũng như trong phương trình hàm, phép thế là một kỹ thuật đơn giản và hiệu quả để thu được các hệ quả hướng đến việc xác định được hàm số. Chú ý là để xác định giá trị hàm số f tại một điểm x_0 từ một bất đẳng thức, ta cần phải kẹp hai phía giá trị $f(x_0)$.

Ta xem xét một số ví dụ:

Bài toán 1. *Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:*

$$f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \geqslant 3f(x+2y+3z), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Cho $y = z = 0$, ta được $2f(x) + f(0) \geqslant 3f(x)$, suy ra

$$f(x) \leqslant f(0), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Lại cho $x = y$ và $z = -x$, ta được $f(2x) + f(0) + f(0) \geqslant 3f(0)$, hay $f(2x) \geqslant f(0)$. Do đó ta có

$$f(x) \geqslant f(0), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra $f(x) = f(0) = C, \forall x \in \mathbb{R}$. Dễ dàng kiểm tra được hàm số này thỏa mãn yêu cầu của bài toán. Vậy ta đi đến kết luận $f(x) = C$ là hàm số cần tìm. □

Bài toán 2. *Xác định tất cả các cặp hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau đây:*

(*i*) $2f(x) - g(x) = f(y) - y, \forall x, y \in \mathbb{R}$;

(*ii*) $f(x)g(x) \geqslant x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Từ (i) thay $y = x$, ta được $2f(x) - g(x) = f(x) - x$, hay $f(x) = g(x) - x$. Như vậy giả thiết (i) có thể được viết lại thành

$$2\big[g(x) - x\big] - g(x) = \big[g(y) - y\big] - y,$$

hay là

$$g(x) = 2x - 2y + g(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

[1]Giáo viên trường Phổ thông Năng khiếu, Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh.

Trong phương trình trên cho $y = 0$ và đặt $g(0) = b$, ta có $g(x) = 2x + b$. Suy ra

$$f(x) = g(x) - x = x + b.$$

Thay biểu thức của f và g vào (ii), ta được

$$(x + b)(2x + b) \geqslant x + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

hay tương đương

$$2x^2 + (3b - 1)x + b^2 - 1 \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bất đẳng thức trên được thỏa mãn với mọi x khi và chỉ khi

$$\Delta = (3b - 1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (b^2 - 1) \leqslant 0.$$

Mặt khác, lại có $(3b - 1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (b^2 - 1) = (b - 3)^2 \geqslant 0$ nên bất đẳng thức trên chỉ được thỏa mãn khi $b = 3$. Từ đây ta có

$$f(x) = x + 3, \quad g(x) = 2x + 3.$$

Dễ kiểm tra được rằng cặp hàm số này thỏa mãn các điều kiện (i) và (ii). Vậy ta đi đến kết luận: $f(x) = x + 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $g(x) = 2x + 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. □

Bài toán 3. *Cho a, b là các số nguyên dương và nguyên tố cùng nhau. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:*

(i) $f(x + a) \leqslant f(x) + a$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

(ii) $f(x + b) \geqslant f(x) + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải. Giả sử f là một hàm số thỏa mãn điều kiện đề bài. Từ giả thiết ta có

$$f(x - a) \geqslant f(x) - a, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

và

$$f(x - b) \leqslant f(x) - b, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ hai bất đẳng thức này và hai giả thiết (i), (ii), sử dụng quy nạp, ta chứng minh được

$$f(x + na) \leqslant f(x) + na, \quad f(x - na) \geqslant f(x) - na, \quad \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

và

$$f(x + nb) \geqslant f(x) + nb, \quad f(x - nb) \leqslant f(x) - nb, \quad \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Do a, b nguyên tố cùng nhau nên tồn tại các số tự nhiên m, n sao cho $ma - nb = 1$. Từ đó

$$f(x + 1) = f(x + ma - nb) \leqslant f(x + ma) - nb \leqslant f(x) + ma - nb = f(x) + 1.$$

Tương tự, ta cũng có p, $q \in \mathbb{N}$ sao cho $pb - qa = 1$ nên

$$f(x + 1) \geqslant f(x + pb - qa) \geqslant f(x + pb) - qa \geqslant f(x) + pb - qa = f(x) + 1.$$

Do vậy

$$f(x + 1) = f(x) + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ngược lại, nếu f là một hàm số thỏa mãn điều kiện $f(x + 1) = f(x) + 1$ với mọi x thì hiển nhiên ta có $f(x + a) = f(x) + a$ và $f(x + b) = f(x) + b$ với mọi x, do đó điều kiện đề bài được thỏa mãn. Vậy tất cả các hàm số cần tìm là $f(x) = g(x)$, với $g(x)$ là một hàm bất kỳ thỏa mãn $g(x + 1) = g(x) + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. □

Bên cạnh việc sử dụng bất đẳng thức kẹp để xác định hàm số, một kết quả khả dĩ khác cho phép giải bất phương trình hàm là chứng minh bất phương trình hàm vô nghiệm. Trong những trường hợp này, ta thường sử dụng phép chứng minh phản chứng: giả sử tồn tại nghiệm hàm và tìm cách suy ra một điều mâu thuẫn nào đó.

Bài toán 4. *Chứng minh rằng không tồn tại hàm $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện:*

$$[f(x)]^2 \geqslant f(x+y)\big[f(x)+y\big], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Chứng minh. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn điều kiện đề bài. Ta viết lại bất phương trình hàm ở đề bài dưới dạng

$$\frac{f^2(x)}{f(x)+y} \geqslant f(x+y),$$

hay

$$f(x)-f(x+y) \geqslant \frac{f(x)y}{f(x)+y}, \quad \forall x, y > 0.$$

Từ đây suy ra f là hàm giảm thực sự trên $\mathbb{R}^+$. Bây giờ, ta sẽ chứng minh với mọi $x>0$ thì

$$f(x)-f(x+1) \geqslant \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Cố định x và chọn n là số tự nhiên sao cho

$$f(x+1) \geqslant \frac{1}{n}.$$

Khi đó với mỗi $k=0, 1, \ldots, n-1$, ta có

$$f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f\left(x+\frac{k+1}{n}\right) \geqslant \frac{f\left(x+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}}{f\left(x+\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{n}} \geqslant \frac{1}{2n}.$$

Suy ra

$$f(x)-f(x+1)=\left[f(x)-f\left(x+\frac{1}{n}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(x+\frac{n-1}{n}\right)-f(x+1)\right] \geqslant n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Vậy (1) đúng. Sử dụng kết quả này với m là số tự nhiên thỏa mãn $m \geqslant 2f(x)$, ta có

$$f(x)-f(x+m)=\sum_{i=0}^{m-1}\left[f(x+i)-f(x+i+1)\right] \geqslant \frac{m}{2} \geqslant f(x),$$

từ đây suy ra $f(x+m) \leqslant 0$, mâu thuẫn. Vậy không tồn tại hàm f như yêu cầu. □

2 Tính đơn điệu của hàm số trong bất phương trình hàm

Trong chứng minh bất đẳng thức và giải bất phương trình, tính đơn điệu của hàm số thường được sử dụng một cách có hiệu quả. Tương tự như vậy, trong phép giải bất phương trình hàm, tính đơn điệu là một tính chất mạnh mà chúng ta có thể khai thác.

Bài toán 5. *Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:*

$$f(x^3+x) \leqslant x \leqslant f^3(x)+f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lời giải. Ta xét bài toán tổng quát hơn: *Cho $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một toàn ánh và là hàm tăng thực sự. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$f(g(x)) \leqslant x \leqslant g(f(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chú ý rằng do g tăng thực sự và toàn ánh nên tồn tại hàm ngược g^{-1}. Giả sử f là hàm số thỏa mãn điều kiện bài toán. Khi đó, ta có

$$f(x) = f\left(g(g^{-1}(x))\right) \leqslant g^{-1}(x). \tag{1}$$

Do g^{-1} cũng tăng thực sự nên với $x \leqslant g(f(x))$ thì

$$g^{-1}(x) \leqslant g^{-1}\left(g(f(x))\right) = f(x). \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra $f(x) = g^{-1}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Dễ thấy hàm này thỏa. Vậy $f = g^{-1}$ là hàm duy nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài toán 6. *Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:*

$$f\left(\frac{2x+y}{3}\right) \geqslant f\left(\sqrt[3]{x^2y}\right), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) *Chứng minh rằng f là hàm hằng.*

(b) *Chứng minh rằng nếu bất phương trình hàm trên được thỏa mãn với mọi x, y mà $xy \geqslant 0$ thì f nghịch biến trên $(-\infty, 0)$ và đồng biến trên $(0, +\infty)$.*

Chứng minh. **(a)** Với x bất kỳ, ta có

$$f(x) = f\left(\frac{2\cdot 0 + 3x}{3}\right) \geqslant f\left(\sqrt[3]{0^2 \cdot 3x}\right) = f(0).$$

Mặt khác, bằng cách chọn $y = x\sqrt[3]{4}$, ta được

$$f(0) = f\left(\frac{2\cdot \frac{-y}{2} + y}{3}\right) \geqslant f\left(\sqrt[3]{\left(-\frac{y}{2}\right)^2 \cdot y}\right) = f\left(\frac{y}{\sqrt[3]{4}}\right) = f(x).$$

Vậy $f(x) = f(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, tức f là hàm hằng.

(b) Lấy $0 < x < y$. Phương trình ẩn t là $h(t) = 2t^3 - 3yt^2 + x^3 = 0$ có nghiệm $u \in (0, y)$ vì

$$h(0) = x^3 > 0, \quad h(y) = 2y^3 - 3y^3 + x^3 < 0.$$

Do đó $2u^3 - 3yu^2 + x^3 = 0$, hay $x^3 = u^2(3y - 2u)$. Đặt $v = 3y - 2u$ thì ta có $v > 0$ và $x^3 = u^2v$. Từ đây, sử dụng giả thiết, ta được

$$f(y) = f\left(\frac{2u+v}{3}\right) \geqslant f\left(\sqrt[3]{u^2v}\right) = f(x).$$

Như thế f là hàm đồng biến trên $(0, +\infty)$.

Bằng cách xét hàm $g(x) = f(-x)$, ta chứng minh được g cũng đồng biến trên $(0, +\infty)$, suy ra f nghịch biến trên $(-\infty, 0)$. □

3 Chuyển qua giới hạn trong bất phương trình hàm

Việc xét các điểm đặc biệt luôn là một kỹ thuật thông dụng khi giải phương trình hàm và bất phương trình hàm. Bên cạnh các điểm hữu hạn (như 0, 1), điểm ∞ là một điểm đặc biệt có thể được khai thác. Nhiều bất phương trình hàm giải được nhờ phép chuyển qua giới hạn.

Bài toán 7. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to(0,\,2011]$ thỏa mãn điều kiện:*

$$f(x)\leqslant 2011\left[2-\frac{2011}{f(y)}\right],\quad \forall x,\,y\in\mathbb{R},\,x>y.$$

Lời giải. Đặt $2011=a$. Từ giả thiết suy ra

$$\frac{f(x)}{a}+\frac{a}{f(y)}\leqslant 2,\quad \forall x>y. \tag{1}$$

Do $f(x)>0$, $f(y)>0$ nên theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{f(x)}{a}+\frac{a}{f(y)}\geqslant 2\sqrt{\frac{f(x)}{f(y)}}.$$

Từ đây, kết hợp với (1) ta được $f(x)\leqslant f(y)$, $\forall x>y$, suy ra f không tăng trên $\mathbb{R}$. Lại do giả thiết f bị chặn nên tồn tại $\lim_{x\to+\infty}f(x)=b$. Trong (1), thay $x=t^2$ và $y=t$ $(t>1)$, ta có

$$\frac{f(t^2)}{a}+\frac{a}{f(t)}\leqslant 2,\quad \forall t>1.$$

Bây giờ, cho $t\to+\infty$, ta được

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\leqslant 2,$$

từ đó suy ra $a=b$ vì $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2=\frac{(a-b)^2}{ab}\geqslant 0$. Như thế với mọi $x>y$, ta có

$$a=\lim_{x\to+\infty}f(x)\leqslant f(x)\leqslant f(y)\leqslant a,$$

tức $f(x)=a=2011$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Dễ thấy hàm này thỏa mãn bất phương trình đã cho. Vì vậy ta đi đến kết luận $f(x)=2011$ là hàm số cần tìm. □

Bài toán 8. *Chứng minh rằng không tồn tại hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời $f(0)>0$ và*

$$f(x+y)\geqslant f(x)+yf\big(f(x)\big),\quad \forall x,\,y\in\mathbb{R}.$$

Chứng minh. Giả sử trái lại rằng tồn tại hàm f thỏa mãn yêu cầu bài toán. Nếu $f\big(f(x)\big)\leqslant 0$ với mọi x thì với bất kỳ $y<0$, ta có

$$f(x+y)\geqslant f(x)+yf\big(f(x)\big)\geqslant f(x).$$

Như thế f là hàm giảm. Từ đó do $f(0)>0\geqslant f\big(f(x)\big)$, ta suy ra $f(x)>0$ với mọi x, mâu thuẫn. Vậy phải tồn tại x sao cho $f\big(f(x)\big)>0$. Cố định giá trị x này và cho $y\to+\infty$ trong bất phương trình hàm ở đầu bài, ta được $\lim_{y\to+\infty}f(y)=+\infty$. Do đó

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f\big(f(x)\big)=+\infty.$$

Từ đây ta suy ra tồn tại các số dương a, b sao cho

$$f(a) \geqslant 0, \quad f(f(a)) > 1, \quad b \geqslant \frac{a+1}{f(f(a))-1}, \quad f(f(a+b+1)) \geqslant 0.$$

Khi đó, ta có $f(a+b) \geqslant f(a) + bf(f(a)) \geqslant a+b+1$ và như thế

$$\begin{aligned} f(f(a+b)) &\geqslant f(a+b+1) + [f(a+b) - (a+b+1)]f(f(a+b+1)) \\ &\geqslant f(a+b+1) \geqslant f(a+b) + f(f(a+b)) \\ &\geqslant f(a) + bf(f(a)) + f(f(a+b)) > f(f(a+b)). \end{aligned}$$

Mâu thuẫn. Vậy không tồn tại hàm f thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài toán 9 (IMO, 2011). *Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện*

$$f(x+y) \leqslant yf(x) + f(f(x)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Chứng minh rằng $f(x) = 0$ với mọi $x \leqslant 0$.

Chứng minh. Trước hết ta sẽ chứng minh

$$f(x) \leqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thật vậy, giả sử có a mà $f(a) > 0$. Ta cố định $x = a$ này và cho $y \to -\infty$ thì từ (1) ta có $f(y) \to -\infty$. Mặt khác, từ (1) cho $y = -x$ thì được

$$f(0) \leqslant -xf(x) + f(f(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

hay

$$f(0) + xf(x) \leqslant f(f(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Trong (2) cho $x \to -\infty$ thì ta có $f(0) + xf(x) \to +\infty$, trong khi đó $f(f(x)) \to -\infty$, vô lý. Vậy $f(x) \leqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Bây giờ, thay $x = 0$ và $y = f(x)$, ta được

$$f(f(x)) \leqslant f(x)f(0) + f(f(0)).$$

Từ đó kết hợp với (1), ta có

$$f(x+y) \leqslant f(x)[y + f(0)] + f(f(0)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Trong (3) thay $y = f(0) - x$, ta được

$$f(f(0)) \leqslant f(x)[2f(0) - x] + f(f(0))$$

hay

$$f(x)[2f(0) - x] \geqslant 0.$$

Vì $f(x) \leqslant 0$ với mọi x nên nếu $x < 2f(0)$ thì ta có $f(x) \geqslant 0$, từ đó suy ra $f(x) = 0$, $\forall x < 2f(0)$. Lại thế $y = -f(0)$ và $x = 3f(0) - 1$ vào (3), ta được

$$0 = f(2f(0) - 1) \leqslant f(f(0)).$$

Kết hợp với $f(f(0)) \leqslant 0$, ta suy ra

$$f(f(0)) = 0.$$

Mặt khác, trong (1) cho $y = 0$, ta có

$$f(x) \leqslant f\big(f(x)\big), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó

$$f(0) \leqslant f\big(f(0)\big) \leqslant f\left(f\big(f(0)\big)\right) = f(0).$$

Từ đây suy ra $f(0) = f\big(f(0)\big) = 0$. Và như vậy, ta đã chứng minh được $f(x) = 0$, $\forall x \leqslant 0$. □

Chú ý. Có thể tìm được một hàm không tầm thường thỏa mãn yêu cầu bài toán là

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x \leqslant 0 \\ -e^x & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

4 Dãy số và bất phương trình hàm

Nếu phép thế là một kỹ thuật thông dụng khi giải các bất phương trình hàm có nhiều biến tự do thì với bất phương trình hàm (và phương trình hàm!) có một biến tự do, kỹ thuật dãy số và lặp có thể giúp xác định giá trị hàm số tại một điểm.

Bài toán 10 (Việt Nam, 2003): *Gọi F là tập hợp tất cả các hàm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn*

$$f(3x) \geqslant f\big(f(2x)\big) + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Tìm số thực α lớn nhất sao cho với mọi $f \in F$, ta có

$$f(x) \geqslant \alpha x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Lời giải. Dễ thấy hàm số $f(x) = \frac{x}{2}$ thuộc F, do đó ta có $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Xét một hàm bất kỳ $f \in F$. Từ giả thiết ta có

$$f(x) \geqslant f\left(f\left(\frac{2x}{3}\right)\right) + \frac{x}{3} \geqslant \frac{x}{3}.$$

Ta xây dựng dãy (α_n) như sau

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{2\alpha_n^2 + 1}{3}, \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

Sử dụng quy nạp, ta sẽ chứng minh rằng

$$f(x) \geqslant \alpha_n x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Hiển nhiên khẳng định đúng với $n = 1$. Giả sử khẳng định đúng với $n = k$. Khi đó ta có

$$f(x) \geqslant \alpha_k f\left(\frac{2x}{3}\right) + \frac{x}{3} \geqslant \alpha_k \cdot \alpha_k \cdot \frac{2x}{3} + \frac{x}{3} = \frac{2\alpha_k^2 + 1}{3} x = \alpha_{k+1} x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Như thế khẳng định đúng với $n = k + 1$ và do đó đúng với mọi n.

Tiếp theo, cũng bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được $\alpha_n \leqslant \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Mặt khác,

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{1}{3}(\alpha_n - 1)(2\alpha_n - 1) > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Như vậy dãy (α_n) hội tụ và dễ thấy $\lim \alpha_n = \frac{1}{2}$. Từ đó ta có $f(x) \geqslant \frac{x}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$. Do đó giá trị cần tìm là $\alpha = \frac{1}{2}$. □

Bài toán 11. *Tìm tất cả các hàm liên tục $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:*

(i) $f(0) = f(1) = 0$;

(ii) $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in [0, 1]$.

Lời giải. Trong (ii), thay $x = y$, ta được $f(x) \leqslant 2f(x)$, từ đó suy ra

$$f(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Tính giá trị của f tại một số điểm, ta thấy

- Do $0 \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{0+1}{2}\right) \leqslant f(0) + f(1) = 0$ nên $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.
- Do $0 \leqslant f\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{\frac{1}{2}+0}{2}\right) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right) + f(0) = 0$ nên $f\left(\frac{1}{4}\right) = 0$.
- Do $f\left(\frac{3}{4}\right) = f\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{2}\right) \leqslant f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ nên $f\left(\frac{3}{4}\right) = 0$.

Từ những kết quả này, ta đi đến dự đoán

$$f\left(\frac{m}{2^n}\right) = 0, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, m \leqslant 2^n. \tag{1}$$

Ta sẽ chứng minh điều này bằng quy nạp theo n. Dễ thấy khẳng định này đúng với $n = 0$, $n = 1$. Giả sử (1) đúng với $n-1$ $(n \geqslant 2)$, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với n. Ta có hai trường hợp:

- Nếu $m = 2k$, $0 \leqslant k \leqslant 2^{n-1}$ thì theo giả thiết quy nạp, ta có

$$f\left(\frac{m}{2^n}\right) = f\left(\frac{2k}{2^n}\right) = f\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) = 0.$$

- Xét trường hợp $m = 2k + 1$, $0 \leqslant k \leqslant 2^{n-1} - 1$:
  - Với $k \leqslant 2^{n-2}$, sử dụng giả thiết quy nạp, ta được

$$f\left(\frac{m}{2^n}\right) = f\left(\frac{2k+1}{2^n}\right) = f\left(\frac{\frac{k}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}}}{2}\right) \leqslant f\left(\frac{k}{2^{n-2}}\right) + f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 0 + 0 = 0,$$

  từ đó suy ra $f\left(\frac{m}{2^n}\right) = 0$.
  - Với $2^{n-2} \leqslant k \leqslant 2^{n-1} - 1$, ta có

$$f\left(\frac{m}{2^n}\right) = f\left(\frac{2k+1}{2^n}\right) = f\left(\frac{1 + \frac{2k+1-2^{n-1}}{2^{n-1}}}{2}\right) \leqslant f(1) + f\left(\frac{2k+1-2^{n-1}}{2^{n-1}}\right).$$

  Do $0 < 2k + 1 - 2^{n-1} < 2^{n-1}$ nên theo giả thiết quy nạp, $f\left(\frac{2k+1-2^{n-1}}{2^{n-1}}\right) = 0$. Từ đó

$$f\left(\frac{m}{2^n}\right) \leqslant f(1) + f\left(\frac{2k+1-2^{n-1}}{2^{n-1}}\right) = 0 + 0 = 0,$$

  và như vậy ta có $f\left(\frac{m}{2^n}\right) = 0$.

Vậy (1) đúng với n. Từ đây suy ra (1) đúng với mọi m, n thỏa mãn điều kiện đã nêu.

Bây giờ với mỗi $x \in [0, 1]$, ta chọn dãy (x_n) có dạng $\frac{m}{2^k}$ sao cho $x_n \to x$. Do f liên tục nên

$$f(x) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = 0.$$

Vậy hàm số $f(x) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$ là hàm số duy nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài tập tự luyện

Bài tập 1 (Việt Nam, 1991). Tìm tất cả các hàm $f(x)$ thỏa mãn điều kiện:

$$2f(xy) + 2f(xz) \geqslant 4f(x)f(yz) + 1, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Bài tập 2. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

(i) $f(x^2) = \left[f(x)\right]^2, \forall x \in \mathbb{R}$;

(ii) $f(x+1) = f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài tập 3. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục thỏa mãn điều kiện:

$$f\left(x + \sqrt{2}\right) \leqslant f(x) \leqslant f(x+1), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng f là hàm hằng.

Bài tập 4. Chứng minh rằng tồn tại đa thức hai biến x, y với hệ số thực $P(x, y)$ sao cho các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:

(i) $P(x, y) > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$;

(ii) Với mọi $c > 0$ luôn tồn tại hai số x, y sao cho $P(x, y) = c$.

Bài tập 5 (Rumani, 2001). Chứng minh rằng không tồn tại hàm $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$f(x+y) \geqslant f(x) + yf\big(f(x)\big), \quad \forall x, y > 0.$$

Bài tập 6. Tìm tất cả các hàm liên tục $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x) \geqslant 2xf(x^2), \quad x \in [0, 1].$$

Bài tập 7. Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

(i) $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$;

(ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

Chứng minh rằng $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài tập 8 (APMO, 1994). Tìm tất cả các hàm f xác định trong tập hợp các số thực và nhận giá trị thực thỏa mãn các điều kiện:

(i) $f(1) = 1, f(-1) = -1$;

(ii) $f(x) \leqslant f(0)$ với mọi $x \in (0, 1)$;

(iii) $f(x) + f(y) \leqslant f(x+y) \leqslant f(x) + f(y) + 1$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Bài tập 9. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$\left[f(x) + f(y) - 2f(x)f(y)\right]\left[f(x) + f(z) - 2f(x)f(z)\right] \geqslant 0, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Võ Quốc Bá Cẩn[1]

Bất đẳng thức là một mảng Toán hay và khó. Nó góp mặt trong nhiều lĩnh vực khác nhau của Toán học và là một trong những công cụ đắc lực phục vụ nghiên cứu (trong các mô hình Toán liên tục, trong các mô hình Toán rời rạc trong lý thuyết phương trình, lý thuyết xấp xỉ, lý thuyết biểu diễn, ...). Đặc biệt, các bất đẳng thức sơ cấp cũng là những dạng Toán thường xuyên xuất hiện trong các kỳ thi chọn học sinh giỏi, thi Đại học, ...

Như thế, việc tìm hiểu và học hỏi các phương pháp chứng minh bất đẳng thức là cần thiết. Và trong chuyên đề này, chúng tôi sẽ giới thiệu cùng các bạn một số phương pháp thường được sử dụng để giải các bài toán bất đẳng thức và cực trị. Tuy nhiên, cần lưu ý rằng, ranh giới giữa các phương pháp là rất mong manh và thực tế cho thấy, nhiều khi để có thể sử dụng thành công một phương pháp thì chúng ta cần phải có sự bổ trợ của nhiều phương pháp khác. Điều này là rất tự nhiên. Do đó, dù chúng tôi đã cố gắng phân chia nhưng sẽ có những bài toán nằm trong phạm vi trình bày của phương pháp này nhưng trong lời giải lại có sử dụng các kiến thức của phương pháp khác (tất nhiên ý tưởng chính vẫn là phương pháp đang trình bày).

Ngoài ra, cũng xin lưu ý thêm, phần lớn các lời giải ở đây được trình bày theo hướng vừa suy luận vừa giải và chúng thường khá dài, do đó các em học sinh sau khi đọc chuyên đề này nên tập trình bày lại các lời giải của các bài toán ở đây (ở dạng chỉ có lời giải), điều đó sẽ giúp các em cải thiện được khả năng trình bày của mình, góp ích thiết thực vào việc học tập của các em sau này (đặc biệt là trong thi cử). Cuối cùng, chúng tôi mong rằng bạn đọc sẽ không gặp phải nhiều khó khăn khi theo dõi chuyên đề này.

1 Phương pháp quy nạp Toán học

Phương pháp quy nạp là một trong những công cụ hữu hiệu nhất thường dùng khi chứng minh các mệnh đề Toán học. Cơ sở của phương pháp được xây dựng dựa trên nguyên lý sau

Định lý 1 (Nguyên lý quy nạp Toán học). *Giả sử S là tập hợp nào đó các số nguyên dương, chứa số $k \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, nếu với mọi $n \geqslant k$, $n \in S$, S đều chứa số $n+1$, thì S là tập hợp tất cả các số nguyên dương không nhỏ hơn k.*

Để chứng minh nguyên lý này, chúng ta cần sử dụng tiên đề sau

Định lý 2 (Tính chất sắp xếp thứ tự tốt). *Mỗi tập không rỗng các số nguyên dương đều tồn tại phần tử nhỏ nhất.*

Dựa vào tiên đề này và phương pháp phản chứng (xem phần 2), chúng ta chứng minh được nguyên lý quy nạp Toán học như sau

[1]Trường Đại học Y Dược Cần Thơ.

Chứng minh. Giả sử ngược lại, S không phải là tập hợp tất cả các số nguyên dương không nhỏ hơn k. Khi đó sẽ tồn tại những số nguyên dương lớn hơn k và không thuộc S. Theo tính chất sắp xếp thứ tự tốt, trong tập hợp này tồn tại số nguyên dương $m > k$ nhỏ nhất không thuộc S. Vì m là số nhỏ nhất không thuộc S nên $m - 1 \geqslant k$ sẽ là số nguyên dương thuộc S. Tuy nhiên khi đó theo giả thiết thì $(m-1)+1 = m$ cũng thuộc S, mâu thuẫn. Nguyên lý quy nạp được chứng minh. □

Từ nguyên lý quy nạp, ta thấy rằng để chứng minh một mệnh đề $P(n)$ nào đó đúng với tập hợp các số nguyên dương n, ta chỉ cần thực hiện hai bước:

- *Bước 1.* Chứng minh $P(k)$ đúng, với k là số nhỏ nhất của tập hợp đó.
- *Bước 2.* Chứng minh nếu $P(n)$ đúng thì $P(n+1)$ cũng đúng. (Phần giả thiết $P(n)$ đúng được gọi là *giả thiết quy nạp*)

Phương pháp quy nạp được sử dụng rộng rãi trên khắp các lĩnh vực của Toán học, trong đó có bất đẳng thức. Rất nhiều các kết quả kinh điển trong bất đẳng thức (chẳng hạn, bất đẳng thức AM-GM, bất đẳng thức Chebyshev, ...) đều được xây dựng từ quy nạp. Ngoài ra, quy nạp cũng là một công cụ rất hiệu quả thường được sử dụng trong giải toán bất đẳng thức. Sau đây là một vài ví dụ.

Ví dụ 1. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có*

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

Chứng minh. Gọi $P(n)$ là khẳng định của bài toán đã cho. Dễ thấy $P(1)$ đúng, do đó ta chỉ cần thực hiện bước 2: Chứng minh nếu $P(n)$ đúng thì $P(n+1)$ cũng đúng, tức là

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}.$$

Bằng cách sử dụng giả thiết quy nạp

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n},$$

ta đưa được bất đẳng thức trên về chứng minh

$$2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$2\sqrt{n(n+1)} + 1 < 2(n+1),$$

hay

$$2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1.$$

hiển nhiên đúng do $2n + 1 - 2\sqrt{n(n+1)} = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^2 > 0.$ □

Ví dụ 2. *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng với mọi $n \geqslant 1$, ta đều có*

$$\frac{a^n + b^n + c^n}{3} \geqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n.$$

Chứng minh. Gọi $P(n)$ là khẳng định của bài toán đã cho. Vì $P(1)$ hiển nhiên đúng nên ta chỉ cần chứng minh nếu $P(n)$ đúng thì $P(n+1)$ cũng đúng nữa là xong. Ta có khẳng định "$P(n+1)$ đúng" tương đương với

$$\frac{a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}}{3} \geqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n+1}.$$

Áp dụng giả thiết quy nạp, ta có

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n+1} = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{n} \leqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)\left(\frac{a^n+b^n+c^n}{3}\right).$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$3(a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}) \geqslant (a+b+c)(a^n+b^n+c^n).$$

Thực hiện khai triển trực tiếp, ta viết được bất đẳng thức trên như sau

$$3(a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}) \geqslant (a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}) + (a^nb+b^na) + (b^nc+c^nb) + (c^na+a^nc),$$
$$2(a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}) \geqslant (a^nb+b^na) + (b^nc+c^nb) + (c^na+a^nc),$$
$$(a^{n+1}+b^{n+1}-a^nb-b^na) + (b^{n+1}+c^{n+1}-b^nc-c^nb) + (c^{n+1}+a^{n+1}-c^na-a^nc) \geqslant 0,$$
$$(a^n-b^n)(a-b) + (b^n-c^n)(b-c) + (c^n-a^n)(c-a) \geqslant 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng do ta có tính chất cơ bản: Với mọi x, $y > 0$ và $n \geqslant 1$ thì $x^n - y^n$ và $x - y$ là hai số cùng dấu nhau. □

Trên đây là hai ứng dụng cơ bản của quy nạp trong chứng minh bất đẳng thức, ta chỉ việc áp dụng thẳng không cần phải suy xét gì mà vẫn đi đến kết quả. Tuy nhiên trong thực tế giải toán, muốn sử dụng quy nạp thành công, ta còn phải xét đến nhiều yếu tố khác (thứ tự các biến, *sự bảo tồn* giả thiết, ...). Để hiểu rõ vì sao lại như vậy, chúng ta hãy xét ví dụ sau

Ví dụ 3 (Rumani, 1999). *Cho n số nguyên dương phân biệt $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Chứng minh rằng*

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 \geqslant \frac{2n+1}{3}(a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

Chứng minh. Rõ ràng $P(1)$ hiển nhiên đúng nên vấn đề ta quan tâm bây giờ là làm sao chỉ ra được: Nếu $P(n)$ đúng thì $P(n+1)$ cũng đúng, tức là

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+a_{n+1}^2 \geqslant \frac{2n+3}{3}(a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}).$$

Bây giờ, nếu áp dụng giả thiết quy nạp $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 \geqslant \frac{2n+1}{3}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ thì ta sẽ phải chứng minh

$$\frac{2n+1}{3}(a_1+a_2+\cdots+a_n)+a_{n+1}^2 \geqslant \frac{2n+3}{3}(a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}),$$

hay là

$$3a_{n+1}^2 \geqslant 2(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(2n+3)a_{n+1}. \qquad (1)$$

Tuy nhiên, không như hai ví dụ trên, bất đẳng thức này lại không phải luôn đúng (chẳng hạn, ta xét $a_{n+1} = 1$ và $a_i > 1, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$). Do đó, ta cần phải bổ sung thêm giả thiết

nào đó để cho nó đúng. Quan sát hai vế một chút, ta thấy vế trái là một hàm bậc hai theo a_{n+1} và vế phải là một hàm bậc nhất theo a_{n+1}. Như đã biết, trên miền số nguyên dương, hàm bậc hai tăng nhanh hơn hàm bậc nhất. Do đó, nếu ta chọn giả thiết sao cho a_{n+1} lớn nhất có thể thì rất có thể bất đẳng thức trên đúng. Từ đây, tất nhiên ta nghĩ ngay đến chọn $a_{n+1} = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$. Điều này hoàn toàn có thể được do bất đẳng thức được cho ở đề bài là đối xứng cho a_i.

Với những phân tích và suy luận như trên, chúng ta sẽ thử chứng minh bất đẳng thức (1) với $a_{n+1} = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$. Theo giả thiết, $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ là các số nguyên dương phân biệt, suy ra hai số kề tiếp nhau (về độ lớn) sẽ hơn kém nhau ít nhất 1 đơn vị. Do đó, nếu ta sắp thứ thự $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1}$ thì

$$a_2 - a_1 \geqslant 1, \quad a_3 - a_2 \geqslant 1, \quad \ldots, \quad a_{n+1} - a_n \geqslant 1.$$

Và khi đó, với mọi $1 \leqslant i \leqslant n$, ta có

$$a_{n+1} - a_i = (a_{n+1} - a_n) + (a_n - a_{n-1}) + \cdots + (a_{i+1} - a_i) \geqslant \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n+1-i \text{ số}} = n + 1 - i.$$

Từ đó suy ra $a_i \leqslant a_{n+1} + i - n - 1$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$. Điều này dẫn đến

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leqslant na_{n+1} - n(n+1) + \sum_{i=1}^{n} i = na_{n+1} - \frac{n(n+1)}{2}.$$

Sử dụng đánh giá này, ta đưa được (1) về xét một bất đẳng thức một biến theo a_{n+1}:

$$3a_{n+1}^2 \geqslant 2\left[na_{n+1} - \frac{n(n+1)}{2}\right] + (2n+3)a_{n+1}.$$

Sau khi thu gọn, ta viết được bất đẳng thức trên lại thành

$$3a_{n+1}^2 - (4n+3)a_{n+1} + n(n+1) \geqslant 0,$$

tương đương

$$(a_{n+1} - n - 1)(3a_{n+1} - n) \geqslant 0.$$

Có thể thấy kết quả này đúng do $a_{n+1} \geqslant n + a_1 \geqslant n + 1$.

Vậy là ta đã chứng minh xong bài toán. Chú ý rằng từ lời giải trên, ta cũng suy ra được điều kiện để bất đẳng thức xảy ra dấu đẳng thức là $a_i = i$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$. □

Ví dụ 4. *Giả sử* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 2)$ *là các số thực không âm thỏa mãn* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$. *Chứng minh rằng*

$$(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) + na_1a_2\cdots a_n \geqslant n^2.$$

Chứng minh. Ở bài này, điều mà chúng ta quan tâm vẫn là làm sao thực hiện được bước 2 (vì $P(2)$ hiển nhiên đúng): Chứng minh nếu $P(n)$ đúng thì $P(n+1)$ cũng đúng, tức là

$$n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + a_{n+1}^2) + (n+1)a_1a_2\cdots a_na_{n+1} \geqslant (n+1)^2. \quad (1)$$

Điều đáng nói là ta không thể đánh giá $(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) + na_1a_2\cdots a_n \geqslant n^2$ được bởi trong trường hợp này, giả thiết của bài toán là $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} = n + 1$ chứ không phải $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$, do đó nó chưa thỏa điều kiện để có thể áp dụng giả thiết quy nạp.

Như thế, muốn sử dụng được giả thiết quy nạp, trước hết ta cần tìm cách đưa về điều kiện của nó đã, tức là phải có n số không âm với tổng bằng n. Cách đơn giản nhất để thực hiện điều này chính là xét dãy mới $b_1, b_2, \ldots, b_n$ với

$$b_i = \frac{a_i}{M}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n, \quad M = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

(Ở đây, có thể xét $a_1+a_2+\cdots+a_n > 0$ vì trong trường hợp ngược lại, ta sẽ có $a_i = 0, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$ và (1) hiển nhiên đúng). Lúc này, dễ thấy $b_1 + \cdots + b_n = n$ và do đó, theo giả thiết quy nạp,

$$(n-1)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) + nb_1b_2\cdots b_n \geqslant n^2.$$

Bây giờ, chuyển các biến trở lại theo a_i, ta có

$$\frac{(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)}{M^2} + \frac{na_1a_2\cdots a_n}{M^n} \geqslant n^2,$$

hay tương đương

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geqslant \frac{n^2}{n-1}M^2 - \frac{n}{(n-1)M^{n-2}}a_1a_2\cdots a_n.$$

Vậy là ta đã sử dụng được giả thiết quy nạp và việc còn lại chỉ là chứng minh

$$n\left[\frac{n^2}{n-1}M^2 - \frac{n}{(n-1)M^{n-2}}a_1a_2\cdots a_n + a_{n+1}^2\right] + (n+1)a_1a_2\cdots a_na_{n+1} \geqslant (n+1)^2,$$

hay

$$a_1a_2\cdots a_n\left[(n+1)a_{n+1} - \frac{n^2}{(n-1)M^{n-2}}\right] \geqslant (n+1)^2 - \frac{n^3}{n-1}M^2 - na_{n+1}^2. \quad (2)$$

Để ý rằng $nM + a_{n+1} = n+1$, do đó $(n+1)a_{n+1} - \frac{n^2}{(n-1)M^{n-2}}$ và $(n+1)^2 - \frac{n^3}{n-1}M^2 - na_{n+1}^2$ về bản chất chỉ là các biểu thức một biến. Và như vậy, rất tự nhiên ta muốn đánh giá cho $a_1a_2\cdots a_n$ để chuyển (2) về dạng một biến. Hơn nữa, ta cũng chú ý rằng bất đẳng thức (1) có một dấu bằng là $a_1 = \cdots = a_n = a_{n+1} = 1$, do vậy ta cần có một đánh giá với dấu bằng khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Lẽ tự nhiên, lúc này ta nghĩ ngay đến

$$a_1a_2\cdots a_n \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n = M^n \text{ (bất đẳng thức AM-GM[2]).} \quad (3)$$

Nhưng, để có thể sử dụng nó thì ta cần phải có $(n+1)a_{n+1} - \frac{n^2}{(n-1)M^{n-2}} \leqslant 0$, hay

$$a_{n+1}M^{n-2} \leqslant \frac{n^2}{n^2-1}.$$

Như vậy, ta sẽ tìm cách bổ sung giả thiết để bất đẳng thức này đúng. Nếu xét trực tiếp, ta sẽ gặp khó khăn bởi vế trái có sự xuất hiện của số mũ tổng quát $n-2$. Vì thế, để thuận tiện hơn, ta nên có một đánh giá trung gian nào đó để loại đi số mũ tổng quát rồi tìm điều kiện cho bất đẳng thức mới đúng. Để ý rằng, theo AM-GM thì

$$a_{n+1}M^n \leqslant \left(\frac{a_{n+1} + nM}{n+1}\right)^{n+1} = 1,$$

[2]Xem ở phần 3.

từ đây ta có

$$a_{n+1}M^{n-2} = \frac{a_{n+1}M^n}{M^2} \leqslant \frac{1}{M^2}.$$

Và như thế, chúng ta chỉ cần chọn giả thiết sao cho $\frac{1}{M^2} \leqslant \frac{n^2}{n^2-1}$, hay $M \geqslant \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}}$ là xong. Ở đoạn này, ta thấy ngay là nên chọn giả thiết sao cho M nhận được giá trị lớn nhất có thể, tức là ta nên giả thiết $a_{n+1} = \min\{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$. Lúc ấy, ta có ngay $a_{n+1} \leqslant M$ và

$$M = \frac{nM+M}{n+1} \geqslant \frac{nM+a_{n+1}}{n+1} = 1 > \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}},$$

và ta có thể áp dụng (3) vào (2) để đưa về xét một bất đẳng một biến là

$$M^n\left[(n+1)a_{n+1} - \frac{n^2}{(n-1)M^{n-2}}\right] \geqslant (n+1)^2 - \frac{n^3}{n-1}M^2 - na_{n+1}^2.$$

Để chứng minh bất đẳng thức này, ta thực hiện biến đổi tương đương như sau

$$n^2M^2 + na_{n+1}^2 + (n+1)a_{n+1}M^n \geqslant (n+1)^2,$$
$$n^2M^2 + n(n+1-nM)^2 + (n+1)(n+1-nM)M^n \geqslant (n+1)^2,$$
$$(n+1)(n+1-nM)M^n \geqslant (n+1-nM)\left[n+1+nM - n(n+1-nM)\right],$$
$$(n+1)(n+1-nM)M^n \geqslant (n+1)(n+1-nM)(nM-n+1).$$

Do $M \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n} = \frac{n+1}{n}$ nên ta chỉ cần chứng minh được

$$M^n \geqslant nM - n + 1,$$

hay

$$M^n + (n-1)\cdot 1 \geqslant nM.$$

Tuy nhiên, đây lại là một kết quả hiển nhiên bởi vì nó chính là bất đẳng thức AM-GM áp dụng cho n số không âm gồm: M^n và $n-1$ số 1. Bài toán được chứng minh. □

Có thể thấy điểm đặc biệt tạo nên tính hiệu quả của phương pháp quy nạp chính là ở chỗ ta có thể lợi dụng giả thiết quy nạp sẵn có để tìm ra các đánh giá chính xác giúp đưa bài toán trở về dạng đơn giản hơn, từ đó việc giải nó cũng trở nên dễ dàng hơn rất nhiều. Tuy nhiên, không phải lúc nào giả thiết quy nạp cũng cho ta những đánh giá chính xác và hiệu quả. Hãy thử xét ví dụ sau

Ví dụ 5 (Armenia, 2011). *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(a_1+a_2+\cdots+a_i)}{b_1+b_2+\cdots+b_i} \leqslant 2\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i}$$

đúng với hai dãy số dương bất kỳ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *và* $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Chứng minh. Ở bài này, để có thể sử dụng được quy nạp, ta cần chứng minh nếu khẳng định bài toán đúng với n thì cũng đúng với $n+1$, tức là

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(a_1+a_2+\cdots+a_i)}{b_1+b_2+\cdots+b_i} + \frac{a_{n+1}(a_1+a_2+\cdots+a_{n+1})}{b_1+b_2+\cdots+b_{n+1}} \leqslant 2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i} + \frac{a_{n+1}^2}{b_{n+1}}\right). \quad (1)$$

Nếu sử dụng giả thiết quy nạp $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i(a_1+\cdots+a_i)}{b_1+\cdots+b_i} \leqslant 2\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i}$ thì ta sẽ cần phải chứng minh

$$\frac{a_{n+1}(a_1+\cdots+a_{n+1})}{b_1+\cdots+b_{n+1}} \leqslant \frac{2a_{n+1}^2}{b_{n+1}}.$$

Nhưng ta lại thấy ngay rằng đánh giá này không đúng với mọi a_i, b_i được, và ta cũng không thể sắp thứ tự các biến để cho nó đúng (vì (1) không phải bất đẳng thức đối xứng, cũng không là bất đẳng thức hoán vị). Như vậy, quy nạp không thể sử dụng trực tiếp vào bài này được.

Bây giờ, quan sát (1) một chút, ta thấy nó có dạng một bất đẳng thức đa thức bậc hai theo a_{n+1}, cụ thể là

$$\left(\frac{2}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_1+\cdots+b_{n+1}}\right)a_{n+1}^2 - \frac{a_1+\cdots+a_n}{b_1+\cdots+b_{n+1}}a_{n+1} + 2\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i} - \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(a_1+\cdots+a_i)}{b_1+\cdots+b_i} \geqslant 0.$$

Vế trái của bất đẳng thức là một tam thức bậc hai theo a_{n+1} có hệ số bậc hai dương (vì $\frac{2}{b_{n+1}} > \frac{1}{b_1+b_2+\cdots+b_{n+1}}$) hệ số bậc nhất âm và hệ số tự do không âm (vì theo kết luận bài toán, ta có $2\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i(a_1+\cdots+a_i)}{b_1+\cdots+b_i}$ (dù ta chưa chứng minh được nó)). Từ đây, ta suy ra bất đẳng thức trên đúng với mọi $a_{n+1} > 0$ khi và chỉ khi

$$4\left(\frac{2}{b_{n+1}} - \frac{1}{b_1+\cdots+b_{n+1}}\right)\left[2\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i} - \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(a_1+\cdots+a_i)}{b_1+\cdots+b_i}\right] \geqslant \frac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{(b_1+\cdots+b_{n+1})^2},$$

hay tương đương

$$2\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i} - \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(a_1+\cdots+a_i)}{b_1+\cdots+b_i} \geqslant \frac{b_{n+1}(a_1+\cdots+a_n)^2}{4\big[2(b_1+\cdots+b_n)+b_{n+1}\big]\big[(b_1+\cdots+b_n)+b_{n+1}\big]}. \qquad (2)$$

Theo đề bài, (1) chắc chắn đúng (dù ta chưa chứng minh), do đó ta có thể chắc chắn rằng (2) cũng đúng với mọi số dương $a_i\,(1 \leqslant i \leqslant n)$, $b_j\,(1 \leqslant j \leqslant n+1)$. Như thế, khi ta cố định a_i, $b_i\,(1 \leqslant i \leqslant n)$ thì (2) đúng với mọi $b_{n+1} > 0$. Từ đây ta suy ra tại điểm mà

$$P = \frac{b_{n+1}}{\big[2(b_1+b_2+\cdots+b_n)+b_{n+1}\big]\big[(b_1+b_2+\cdots+b_n)+b_{n+1}\big]}$$

đạt giá trị lớn nhất thì (2) vẫn đúng. Mặt khác, có thể dễ dàng tính được

$$\max P = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2(b_1+b_2+\cdots+b_n)} \text{ đạt được khi } b_{n+1} = \sqrt{2}(b_1+b_2+\cdots+b_n).$$

Do vậy, theo các lập luận trên, ta thu được kết quả là bất đẳng thức sau cũng đúng

$$2\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i} - \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(a_1+a_2+\cdots+a_i)}{b_1+b_2+\cdots+b_i} \geqslant \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{4(\sqrt{2}+1)^2(b_1+b_2+\cdots+b_n)}.$$

Điều này nói lên rằng, chúng ta hoàn toàn có thể làm mạnh bất đẳng thức ở đề bài thành

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i(a_1+a_2+\cdots+a_i)}{b_1+b_2+\cdots+b_i} + \frac{M(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{b_1+b_2+\cdots+b_n} \leqslant 2\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i}, \qquad (3)$$

trong đó M là một hằng số dương thích hợp.

Đến đây, ta chợt đặt ra một câu hỏi rằng: Liệu có tồn tại $M > 0$ vừa đảm bảo (3) đúng, vừa giúp ta có thể thực hiện phép quy nạp để giải nó? Điều trước hết ta quan tâm ở đây chính là bước chứng minh: nếu bất đẳng thức (3) đúng với n thì nó cũng đúng với $n+1$, tức là

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i(a_1+\cdots+a_i)}{b_1+\cdots+b_i} + \frac{a_{n+1}(a_1+\cdots+a_{n+1})}{b_1+\cdots+b_{n+1}} + \frac{M(a_1+\cdots+a_{n+1})^2}{b_1+\cdots+b_{n+1}} \leqslant 2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i}+\frac{a_{n+1}^2}{b_{n+1}}\right).$$

Sau khi sử dụng giả thiết quy nạp

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i(a_1+\cdots+a_i)}{b_1+\cdots+b_i} \leqslant 2\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i} - \frac{M(a_1+\cdots+a_n)^2}{b_1+\cdots+b_n},$$

ta sẽ thu được bất đẳng thức

$$-\frac{M(a_1+\cdots+a_n)^2}{b_1+\cdots+b_n} + \frac{a_{n+1}(a_1+\cdots+a_{n+1})}{b_1+\cdots+b_{n+1}} + \frac{M(a_1+\cdots+a_{n+1})^2}{b_1+\cdots+b_{n+1}} \leqslant \frac{2a_{n+1}^2}{b_{n+1}},$$

và ta hy vọng sẽ tìm được một số M thích hợp để bất đẳng thức này đúng.

Để đơn giản, ta đặt $x = a_1+a_2+\cdots+a_n$ và $y = b_1+b_2+\cdots+b_n$. Khi đó, bất đẳng thức trên được viết lại thành

$$\frac{a_{n+1}(a_{n+1}+x)}{b_{n+1}+y} + \frac{M(a_{n+1}+x)^2}{b_{n+1}+y} \leqslant \frac{2a_{n+1}^2}{b_{n+1}} + \frac{Mx^2}{y},$$

hay tương đương

$$(M+1)a_{n+1}^2 + (2M+1)a_{n+1}x + Mx^2 \leqslant (b_{n+1}+y)\left(\frac{2a_{n+1}^2}{b_{n+1}}+\frac{Mx^2}{y}\right). \qquad (4)$$

Ta cần tìm M sao cho (4) thỏa mãn với mọi a_{n+1}, b_{n+1}, x, $y > 0$. Mà ta có

$$(b_{n+1}+y)\left(\frac{2a_{n+1}^2}{b_{n+1}}+\frac{Mx^2}{y}\right) \geqslant \left(\sqrt{2}a_{n+1}+\sqrt{M}x\right)^2 \text{ (theo Cauchy-Schwarz[3])}$$

với dấu bằng khi $\frac{\sqrt{2}a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{\sqrt{M}x}{y}$, nên (4) đúng với mọi a_{n+1}, b_{n+1}, x, $y > 0$ khi và chỉ khi ta có

$$(M+1)a_{n+1}^2 + (2M+1)a_{n+1}x + Mx^2 \leqslant \left(\sqrt{2}a_{n+1}+\sqrt{M}x\right)^2, \quad \forall a_{n+1}, x > 0,$$

hay là

$$a_{n+1}\left[(1-M)a_{n+1} - \left(2M - 2\sqrt{2M}+1\right)x\right] \geqslant 0, \quad \forall a_{n+1}, x > 0.$$

Điều này chỉ xảy ra khi $1 - M \geqslant 0$ và $2M - 2\sqrt{2M} + 1 \leqslant 0$, tức $M = \frac{1}{2}$. Vậy, nếu ta chọn $M = \frac{1}{2}$ thì bước chứng minh "nếu (3) đúng với n thì cũng đúng với $n+1$" được giải quyết ổn thỏa. Hơn nữa, ta thấy ngay với $M = \frac{1}{2}$ thì (3) đúng cho $n = 1$. Vì vậy, theo quy nạp, ta có bất đẳng thức (3) (ứng với $M = \frac{1}{2}$) đúng với mọi $n \geqslant 1$. Từ đây ta có thể suy ra ngay kết quả cần chứng minh. □

[3] Xem ở phần 3.

Qua ví dụ trên, ta rút ra được thêm một kinh nghiệm để sử dụng phương pháp quy nạp, đó là: Khi ta không thể sử dụng quy nạp trực tiếp để giải bài toán thì hãy dùng các suy luận hợp lý của mình "làm mạnh" bài toán sao cho bài toán "làm mạnh" thỏa mãn tính chất: *Nếu có giả thiết mệnh đề $P(n)$ đúng thì ta có thể sử dụng giả thiết đó để chứng minh mệnh đề $P(n+1)$ cũng đúng.* Khi ấy, chỉ cần tìm được một số n_0 sao cho kết quả bài toán "làm mạnh" đúng là ta có thể sử dụng quy nạp để suy ra ngay kết quả bài toán "làm mạnh" đúng với mọi $n \geqslant n_0$, điều này cũng có nghĩa là ta đã chứng minh được kết quả bài toán đã cho ban đầu đúng với mọi $n \geqslant n_0$. Chú ý rằng:

- Có nhiều cách "làm mạnh" bài toán khác nhau tùy thuộc vào kinh nghiệm và khả năng suy luận của người giải.
- Số n_0 không nhất thiết phải trùng với số nhỏ nhất trong tập hợp các số được cho ở đề bài. Trong trường hợp n_0 không phải là số nhỏ nhất thì từ kết quả bài toán "làm mạnh" ta cũng đã loại đi được một trường hợp lớn cho cả bài toán ban đầu là $n \geqslant n_0$, và việc còn lại ta phải làm chỉ là đi xét từng trường hợp cụ thể của n thỏa $n < n_0$ nữa là xong.

Chúng ta kết lại phần này với một ví dụ cho trường hợp n_0 không phải là số nhỏ nhất.

Ví dụ 6. *Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có*

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<\frac{7}{10}.$$

Chứng minh. Kiểm tra trực tiếp, ta thấy bất đẳng thức đó cho đúng với $n = 1, 2, 3$. Xét trường hợp $n \geqslant 4$. Khi đó ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<\frac{7}{10}-\frac{1}{4n}.$$

Ta sử dụng quy nạp theo n. Với $n = 4$, bất đẳng thức trở thành

$$\frac{1}{4+1}+\frac{1}{4+2}+\frac{1}{4+3}+\frac{1}{4+4}<\frac{7}{10}-\frac{1}{4\cdot 4}.$$

Bằng các tính toán trực tiếp, ta thấy bất đẳng thức này đúng nên $P(4)$ đúng. Giả sử $P(k)$ đúng ($k \geqslant 4$, $k \in \mathbb{N}$), tức là

$$S_k=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}<\frac{7}{10}-\frac{1}{4k}.$$

Ta sẽ chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng, hay là

$$S_{k+1}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k+2}<\frac{7}{10}-\frac{1}{4(k+1)}.$$

Sử dụng giả thiết quy nạp ta được

$$\begin{aligned}S_{k+1}&=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k+2}=S_k-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}\\&=S_k+\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}<\frac{7}{10}-\frac{1}{4k}+\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}.\end{aligned}$$

Do vậy ta chỉ cần chứng minh

$$-\frac{1}{4k}+\frac{1}{2(k+1)(2k+1)}<-\frac{1}{4(k+1)}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{2}{(k+1)(2k+1)} < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$
$$\frac{2}{(k+1)(2k+1)} < \frac{1}{k(k+1)},$$

hiển nhiên đúng vì $2k+1 > 2k$. Vậy $P(k+1)$ đúng. Bài toán được chứng minh xong. □

Bài tập tự luyện

Bài tập 1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta đều có

(a) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1$;

(b) $4^n(n!)^2 > (2n)!$;

(c) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right)$;

(d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

Bài tập 2 (Moldova, 2007). Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực thỏa mãn $a_i \geqslant \frac{1}{i}$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, n$. Chứng minh rằng

$$(a_1+1)\left(a_2 + \frac{1}{2}\right)\cdots\left(a_n + \frac{1}{n}\right) \geqslant \frac{2^n}{(n+1)!}(1 + a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n).$$

Bài tập 3 (Việt Nam, 2011). Cho $x > 0$ và $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^n(x^{n+1}+1)}{x^n+1} \leqslant \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n+1}.$$

Bài tập 4 (IMOSL, 1986). Tìm hằng số C nhỏ nhất sao cho với mọi dãy số thực dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thỏa mãn $x_{k+1} \geqslant x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ với mọi k, thì bất đẳng thức

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \cdots + \sqrt{x_n} \leqslant C\sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$$

cũng đúng với mọi n.

Bài tập 5 (Iran, 1998). Cho n $(n \geqslant 2)$ số thực $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Chứng minh rằng

$$a_1a_2^4 + a_2a_3^4 + \cdots + a_{n-1}a_n^4 + a_na_1^4 \geqslant a_2a_1^4 + a_3a_2^4 + \cdots + a_na_{n-1}^4 + a_1a_n^4.$$

Bài tập 6 (APMO, 1999). Cho (a_n) là dãy gồm vô hạn số thực thỏa mãn $a_{i+j} \leqslant a_i + a_j$ với mọi $i, j \geqslant 1$. Chứng minh rằng

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n} \geqslant a_n.$$

Bài tập 7 (Đài Loan, 1992). Cho n $(n \geqslant 3)$ số thực không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$a_1^2a_2 + a_2^2a_3 + \cdots + a_{n-1}^2a_n + a_n^2a_1 \leqslant \frac{4}{27}.$$

Bài tập 8 (Trung Quốc, 2009). Cho số nguyên dương $n \geqslant 2$, tìm hằng số $\lambda(n)$ lớn nhất có tính chất: Nếu các số thực $a_0, a_1, \ldots, a_n$ thỏa mãn $0 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ và $2a_i \geqslant a_{i-1} + a_{i+1}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n-1$, thì

$$(a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n)^2 \geqslant \lambda(n)(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2).$$

Bài tập 9. Cho các số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thỏa mãn $a_1 + \cdots + a_n = n$. Chứng minh rằng

(a) $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{2n\sqrt{n-1}}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \geqslant n + 2\sqrt{n-1}$;

(b) $(n-1)(a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3) + n^2 \geqslant (2n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$.

Bài tập 10. Chứng minh rằng nếu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số dương có tích bằng 1, thì

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n.$$

Bài tập 11. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta đều có

(a) $1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} < \dfrac{5}{3}$;

(b) $1 + \dfrac{1}{2^3} + \cdots + \dfrac{1}{n^3} < \dfrac{5}{4}$.

Bài tập 12 (Hàn Quốc, 2005). Chứng minh rằng với mọi $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, ta đều có

$$x_1^2 + \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^2 \leqslant 4(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

Bài tập 13 (Mỹ, 1994). Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \geqslant \sqrt{k}$ với mọi $1 \leqslant k \leqslant n$. Chứng minh rằng

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geqslant \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

Bài tập 14. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1 + a_2} + \cdots + \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leqslant 2\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right).$$

2 Phương pháp phản chứng

Có thể thấy một trong những bí quyết để thành công trong giải toán chính là ở chỗ: Làm thế nào để tận dụng được giả thiết được cho. Sử dụng hợp lý điều kiện của đề bài sẽ giúp ta có được những đánh giá chính xác hơn và tất nhiên xác suất để đi đến lời giải hoàn chỉnh cho các bài toán cũng cao hơn. Có những bài toán được cho với giả thiết đơn giản và ta dễ dàng thấy ngay hướng sử dụng. Tuy nhiên, vạn vật trên đời đều có mặt trái của nó. Đã có những bài toán "đẹp" như thế thì tất nhiên cũng sẽ tồn tại những bài toán mà giả thiết được cho khá phức tạp, lạ lẫm, ta không thể thấy ngay hướng đi để giải quyết chúng. Rõ ràng, sẽ rất khó khăn nếu ta tiếp cận bài toán theo hướng trực tiếp. Vậy ta nên làm thế nào?

Trong những trường hợp ấy, người ta thường nghĩ đến ý tưởng: *Thay vì đi chứng minh trực tiếp bài toán, chúng ta sẽ thử phủ định mệnh đề cần chứng minh và tìm cách chỉ ra rằng điều đó không thể xảy ra (tức giả thiết của bài toán sẽ không được thỏa mãn).* Đây chính là tư tưởng chính của phương pháp phản chứng.

Thực tế cho thấy việc giải quyết các bài toán bằng phản chứng đôi khi lại đơn giản hơn việc đi tìm cách chứng minh trực tiếp rất nhiều bởi trong nhiều trường hợp, hướng đi trực tiếp cho ta nhiều trường hợp để xét trong khi đó hướng đi bằng phản chứng lại chỉ phải xét một số lượng ít hơn các trường hợp. Sau đây là một số ví dụ minh họa:

Ví dụ 7. *Chứng minh nếu các số thực a, b, c thỏa mãn*

$$a+b+c>0, \quad ab+bc+ca>0, \quad abc>0,$$

thì a, b, c là các số dương.

Chứng minh. Giả sử $a \leqslant 0$, khi đó ta có $b+c>-a \geqslant 0$, từ đó suy ra

$$bc>-ab-ca=-a(b+c) \geqslant 0.$$

Do vậy $abc \leqslant 0$, mâu thuẫn với giả thiết $abc>0$. Vậy a phải là số dương. Chứng minh tương tự, ta cũng có b, c là các số dương. Bài toán được giải quyết xong. □

Ví dụ 8. *Cho $a \geqslant 4$, $b \geqslant 5$, $c \geqslant 6$ và $a^2+b^2+c^2=90$. Chứng minh rằng*

$$a+b+c \geqslant 16.$$

Chứng minh. Đặt $a=x+4$, $b=y+5$, $c=z+6$ thì ta có x, y, $z \geqslant 0$ và điều kiện của bài toán trở thành $(x+4)^2+(y+5)^2+(z+6)^2=90$. Sau khi khai triển và rút gọn, ta được

$$x^2+y^2+z^2+12(x+y+z)-4x-2z=13. \tag{1}$$

Ta cần chứng minh $a+b+c \geqslant 16$, hay

$$x+y+z \geqslant 1.$$

Giả sử tồn tại các số thực x, y, $z \geqslant 0$ thỏa mãn (1) nhưng $x+y+z<1$. Khi đó, hiển nhiên ta có x, y, $z \in [0, 1)$, suy ra $x^2 \leqslant x$, $y^2 \leqslant y$, $z^2 \leqslant z$. Từ đây đưa đến

$$\begin{aligned} 13 &= x^2+y^2+z^2+12(x+y+z)-4x-2z \leqslant x^2+y^2+z^2+12(x+y+z) \\ &\leqslant x+y+z+12(x+y+z)=13(x+y+z)<13. \end{aligned}$$

Mâu thuẫn này cho ta kết quả cần chứng minh. □

Ví dụ 9 (Mỹ, 2001). *Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a+b+c \geqslant abc$. Chứng minh rằng ít nhất hai trong ba bất đẳng thức sau là bất đẳng thức đúng*

$$\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{6}{c} \geqslant 6, \quad \frac{2}{b}+\frac{3}{c}+\frac{6}{a} \geqslant 6, \quad \frac{2}{c}+\frac{3}{a}+\frac{6}{b} \geqslant 6.$$

Chứng minh. Đặt $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{b}$ và $z=\frac{1}{c}$ thì ta có x, y, $z>0$, $xy+yz+zx \geqslant 1$ và ta phải chứng minh rằng ít nhất hai trong ba bất đẳng thức sau đúng

$$2x+3y+6z \geqslant 6, \quad 2y+3z+6x \geqslant 6, \quad 2z+3x+6y \geqslant 6.$$

Giả sử sự thật không phải như vậy, tức là trong ba bất đẳng thức trên có ít nhất hai bất đẳng thức sai. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử

$$2x + 3y + 6z < 6, \quad 2y + 3z + 6x < 6.$$

Cộng hai bất đẳng thức này lại theo vế, ta được

$$8x + 5y + 9z < 12.$$

Do $xy + yz + zx \geqslant 1$ nên $x \geqslant \frac{1-yz}{y+z}$, từ đó suy ra

$$\frac{8(1-yz)}{y+z} + 5y + 9z < 12.$$

Sau khi quy đồng và khử mẫu, ta được

$$5y^2 + 9z^2 - 12y - 12z + 6yz + 8 < 0,$$

hay tương đương

$$(3z + y - 2)^2 + 4(y-1)^2 < 0.$$

Tuy nhiên, điều này không thể xảy ra. Vì vậy, ta có điều phải chứng minh. □

Trên đây là một số ứng dụng đơn giản của phản chứng trong chứng minh bất đẳng thức. Bây giờ ta sẽ chuyển sang các ví dụ áp dụng phức tạp hơn:

Ví dụ 10 (IMO, 2001). *Chứng minh rằng với mọi a, b, $c > 0$, ta đều có*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1.$$

Chứng minh. Bất đẳng thức đã cho vừa chứa phân thức vừa có căn thức. Hai yếu tố này là hai yếu tố chính gây khó khăn cho ta trong việc giải bài toán. Do đó, muốn giải được bài toán thì tất nhiên ta phải tìm cách loại chúng. Một trong các cách để xử lý những trường hợp như thế này là đặt ẩn mới, cụ thể ta sẽ đặt

$$x = \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}, \quad z = \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}.$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh sẽ trở thành $x + y + z \geqslant 1$ (không có căn thức lẫn phân thức). Bây giờ, ta cần tìm miền xác định cho x, y, z và mối liên hệ giữa chúng. Từ phép đặt, ta có $0 < x, y, z < 1$ và

$$\frac{bc}{a^2} = \frac{1-x^2}{8x^2}, \quad \frac{ca}{b^2} = \frac{1-y^2}{8y^2}, \quad \frac{ab}{c^2} = \frac{1-z^2}{8z^2}.$$

Do đó

$$8^3x^2y^2z^2 = (1-x^2)(1-y^2)(1-z^2).$$

Như vậy ta phải chứng minh

$$x + y + z \geqslant 1$$

với $0 < x, y, z < 1$ và $8^3x^2y^2z^2 = (1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)$.

Tuy nhiên, mặc dù đã loại được căn thức và phân thức nhưng giả thiết mới thu được lại rất "xa lạ" và không dễ để vận dụng nó. Trong khi đó, điều cần chứng minh lại gần gũi và quen thuộc hơn rất nhiều. Do đó ta nghĩ ngay đến việc dùng phản chứng để giải bài toán này: Giả sử $x+y+z<1$, khi đó ta có

$$1-x^2>(x+y+z)^2-x^2=(y+z)(2x+y+z),$$
$$1-y^2>(x+y+z)^2-y^2=(z+x)(2y+z+x),$$
$$1-z^2>(x+y+z)^2-z^2=(x+y)(2z+x+y).$$

Suy ra

$$8^3x^2y^2z^2>(x+y)(y+z)(z+x)(2x+y+z)(2y+z+x)(2z+x+y).$$

Mặt khác, sử dụng đánh giá cơ bản $(u+v)(v+w)(w+u)\geqslant 8uvw$, ta lại có

$$\begin{aligned}(2x+y+z)(2y+z+x)(2z+x+y)&=\\&=\big[(x+y)+(z+x)\big]\big[(z+x)+(y+z)\big]\big[(y+z)+(x+y)\big]\\&\geqslant 8(x+y)(y+z)(z+x)\geqslant 8^2xyz.\end{aligned}$$

Kết hợp với trên, ta được

$$(x+y)(y+z)(z+x)(2x+y+z)(2y+z+x)(2z+x+y)\geqslant 8xyz\cdot 8^2xyz=8^3x^2y^2z^2.$$

Mâu thuẫn này cho ta điều phải chứng minh. □

Ví dụ 11. *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $2(a^2+b^2+c^2)+3abc=9$. Chứng minh rằng*

$$a+b+c\leqslant 3.$$

Chứng minh. Cũng giống như bài toán trước, ở bài toán này điều cần chứng minh trông đơn giản và dễ "sử dụng" hơn giả thiết được cho. Do đó, rất tự nhiên ta nghĩ đến việc sử dụng phản chứng: Giả sử $a+b+c>3$, khi đó $1>\frac{3}{a+b+c}>0$. Suy ra

$$\begin{aligned}9&=2(a^2+b^2+c^2)\cdot 1^2+3abc\cdot 1^3\\&>2(a^2+b^2+c^2)\cdot\left(\frac{3}{a+b+c}\right)^2+3abc\cdot\left(\frac{3}{a+b+c}\right)^3\\&=\frac{18(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}+\frac{81abc}{(a+b+c)^3}.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức này có thể viết lại thành

$$(a+b+c)^3>2(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)+9abc.$$

Sau khi thu gọn, ta được

$$a^3+b^3+c^3+3abc<ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a).$$

Tuy nhiên, điều này không thể xảy ra vì theo bất đẳng thức Schur[4], ta có đánh giá với chiều ngược lại là một bất đẳng thức đúng. Vậy ta có điều phải chứng minh. □

[4]Bất đẳng thức Schur được đặt theo tên nhà Toán học Issai Schur (1875-1941). Nội dung của bất đẳng thức này như sau: *Với bốn số thực không âm tùy ý a, b, c, r, ta có*

$$a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-c)(b-a)+c^r(c-a)(c-b)\geqslant 0.$$

Trong trường hợp đặc biệt $r=1$, sau khi khai triển, bất đẳng thức Schur có thể viết lại thành

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geqslant ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a).$$

Quan sát lời giải của hai bài toán trên, ta có các nhận xét như sau:

- Ở ví dụ 10, bất đẳng thức được cho là một bất đẳng thức thuần nhất nhưng chứa căn thức khá phức tạp. Sau khi sử dụng phản chứng, ta thu được 1 bất đẳng thức mới cũng là bất đẳng thức thuần nhất nhưng lại có dạng phát biểu đơn giản và không có căn thức.

- Ở ví dụ 11, bất đẳng thức được cho có điều kiện rất "lạ" và từ nó ta không thể tìm được cách để chuyển bất đẳng thức về dạng thuần nhất. Sau khi sử dụng phản chứng, ta thu được một bất đẳng thức mới có dạng thuần nhất.

Từ hai nhận xét này, ta rút ra được một kinh nghiệm trong việc sử dụng phản chứng để giải các bài toán dạng như trên, đó là: Ta nên chọn mệnh đề phản chứng nào mà sau khi sử dụng nó, ta sẽ thu được một bất đẳng thức thuần nhất.

Chúng ta kết lại phần này bằng ví dụ sau đây:

Ví dụ 12. *Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{2}{(1+x)(1+y)(1+z)} \geqslant 1.$$

Chứng minh. Đặt $a = \frac{1}{1+x}$, $b = \frac{1}{1+y}$ và $c = \frac{1}{1+z}$ thì ta có $0 < a, b, c < 1$. Giả thiết của bài toán được viết lại thành $(1-a)(1-b)(1-c) = abc$ và ta phải chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+2abc \geqslant 1.$$

Từ giả thiết $(1-a)(1-b)(1-c) = abc$, ta có

$$2abc = ab+bc+ca-a-b-c+1,$$

và do đó bất đẳng thức trên tương đương với

$$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \geqslant a+b+c.$$

Giả sử ngược lại $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca < a+b+c$, khi đó ta có

$$0 < \frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{a+b+c} < 1,$$

dẫn đến

$$1-a > \frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{a+b+c} - a = \frac{b^2+bc+c^2}{a+b+c},$$
$$1-b > \frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{a+b+c} - b = \frac{c^2+ca+a^2}{a+b+c},$$
$$1-c > \frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{a+b+c} - c = \frac{a^2+ab+b^2}{a+b+c}.$$

Từ đó suy ra

$$abc = (1-a)(1-b)(1-c) > \frac{(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)(a^2+ab+b^2)}{(a+b+c)^3},$$

hay

$$(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)(a^2+ab+b^2) < abc(a+b+c)^3.$$

Ta sẽ chỉ ra điều mâu thuẫn bằng cách chứng minh bất đẳng thức với chiều ngược lại đúng. Thật vậy, ta có

$$b^2+bc+c^2=\frac{3}{4}(b+c)^2+\frac{1}{4}(b-c)^2\geqslant\frac{3}{4}(b+c)^2,$$
$$c^2+ca+a^2=\frac{3}{4}(c+a)^2+\frac{1}{4}(c-a)^2\geqslant\frac{3}{4}(c+a)^2,$$
$$a^2+ab+b^2\geqslant\frac{3}{4}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a-b)^2\geqslant\frac{3}{4}(a+b)^2.$$

Sử dụng các đánh giá này kết hợp với hai bất đẳng thức cơ bản

$$(u+v)(v+w)(w+u)\geqslant\tfrac{8}{9}(u+v+w)(uv+vw+wu),\quad \forall u,\,v,\,w>0,$$
$$(uv+vw+wu)^2\geqslant 3uvw(u+v+w),\quad \forall u,\,v,\,w>0,$$

ta được

$$\begin{aligned}(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)&\geqslant\frac{27}{64}(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2\\&\geqslant\frac{27}{64}\left[\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)\right]^2\\&=\frac{(a+b+c)^2(ab+bc+ca)^2}{3}\\&\geqslant abc(a+b+c)^3.\end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Nhận xét. Nếu các bạn đã biết qua tính chất: *Nếu $x,\,y,\,z$ là các số thực dương thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ thì tồn tại $m,\,n,\,p>0$ sao cho*

$$x=\frac{m}{\sqrt{(m+n)(m+p)}},\quad y=\frac{n}{\sqrt{(n+p)(n+m)}},\quad z=\frac{p}{\sqrt{(p+m)(p+n)}},$$

thì chúng ta còn có một cách phản chứng khác cho bài toán trên như sau:

Cách 2. Đầu tiên, ta cũng đặt ẩn phụ như trên để đưa bài toán về chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+2abc\geqslant 1$$

với $0<a,\,b,\,c<1$ và $(1-a)(1-b)(1-c)=abc$.

Bây giờ, giả sử $a^2+b^2+c^2+2abc<1$, khi đó ta thấy tồn tại $k>1$ sao cho

$$(ka)^2+(kb)^2+(kc)^2+2(ka)(kb)(kc)=1.$$

Do vậy, tồn tại các số dương $m,\,n,\,p$ sao cho

$$ka=\frac{m}{\sqrt{(m+n)(m+p)}},\quad kb=\frac{n}{\sqrt{(n+p)(n+m)}},\quad kc=\frac{p}{\sqrt{(p+m)(p+n)}}.$$

Vì $k>1$ nên từ trên, ta suy ra

$$a<\frac{m}{\sqrt{(m+n)(m+p)}}<1,\quad b<\frac{n}{\sqrt{(n+p)(n+m)}}<1,\quad c<\frac{p}{\sqrt{(p+m)(p+n)}}<1.$$

Từ đó dẫn đến

$$1 = \frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{abc} = \left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)$$
$$> \left[\frac{\sqrt{(m+n)(m+p)}}{m}-1\right]\left[\frac{\sqrt{(n+p)(n+m)}}{n}-1\right]\left[\frac{\sqrt{(p+m)(p+n)}}{p}-1\right].$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz,

$$\sqrt{(m+n)(m+p)} \geqslant m+\sqrt{np},\ \sqrt{(n+p)(n+m)} \geqslant n+\sqrt{pm},\ \sqrt{(p+m)(p+n)} \geqslant p+\sqrt{mn}.$$

Do vậy, ta có

$$\prod\left[\frac{\sqrt{(m+n)(m+p)}}{m}-1\right] \geqslant \left(\frac{m+\sqrt{np}}{m}-1\right)\left(\frac{n+\sqrt{pm}}{n}-1\right)\left(\frac{p+\sqrt{mn}}{p}-1\right) = 1.$$

Mâu thuẫn này cho chúng ta kết quả bài toán. □

Bài tập tự luyện

Bài tập 15. Cho $a,\ b,\ c > 0$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong ba bất đẳng thức sau là bất đẳng thức sai

$$a(2-b) > 1, \quad b(2-c) > 1, \quad c(2-a) > 1.$$

Bài tập 16. Cho các số thực không âm $x,\ y,\ z$ thỏa mãn $x+y+z \geqslant 5$. Chứng minh rằng ít nhất hai trong các bất đẳng thức sau đúng

$$2x+3y+6z \geqslant 14, \quad 2y+3z+6x \geqslant 14, \quad 2z+3x+6y \geqslant 14.$$

Bài tập 17. Cho các số thực $x,\ y$ thỏa mãn $y \geqslant 0$ và $y(y+1) \leqslant (x+1)^2$. Chứng minh rằng

$$y(y-1) \leqslant x^2.$$

Bài tập 18 (Mỹ, 2000)**.** Chứng minh rằng với mọi $a,\ b,\ c > 0$, ta đều có

$$\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} \leqslant \max\left\{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2,\ \left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2,\ \left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2\right\}.$$

Bài tập 19. Cho $a,\ b,\ c > 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca+abc = 4$. Chứng minh rằng

(a) (Việt Nam, 1996) $a+b+c \geqslant ab+bc+ca$;

(b) $a^2+b^2+c^2+abc+8 \geqslant 4(a+b+c)$ $(a,\ b,\ c \in \mathbb{R})$;

(c) $a^2+b^2+c^2-3 \geqslant 2\left(\sqrt{2}+1\right)(a+b+c-3)$;

(d) $a^2+b^2+c^2+28 \geqslant 8(a+b+c)+7abc$.

Bài tập 20 (Mỹ, 2001)**.** Chứng minh rằng với mọi số thực không âm $a,\ b,\ c$ thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2+abc = 4$, ta có

$$0 \leqslant ab+bc+ca-abc \leqslant 2.$$

Bài tập 21 (Rumani, 2007). Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\geqslant 1$. Chứng minh rằng

$$a+b+c\geqslant ab+bc+ca.$$

Bài tập 22. Cho a, b, c, x, y, $z>0$ thỏa mãn $a+b+c=x+y+z$. Chứng minh rằng

$$ax^2+by^2+cz^2+xyz\geqslant 4abc.$$

Bài tập 23. Cho a, b, $c\geqslant 0$ thỏa mãn $a+b+c+abc=4$. Chứng minh rằng

(a) $a^2+b^2+c^2+12\geqslant 5(ab+bc+ca)$;

(b) $3(a^2+b^2+c^2)+13(ab+bc+ca)\geqslant 48$;

(c) $a^2+b^2+c^2+3\geqslant 2(ab+bc+ca)$ $(a,\ b,\ c\in\mathbb{R})$.

Bài tập 24. Cho a, b, $c\geqslant 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca=abc+2$. Chứng minh rằng

(a) $a^2+b^2+c^2+abc\geqslant 4$;

(b) $a^2+b^2+c^2-3\geqslant\left(2+\sqrt{3}\right)(a+b+c-3)$.

Bài tập 25. Cho a_1, a_2, ..., $a_n>0$ và $a_1+\cdots+a_n=\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}$. Chứng minh rằng

(a) $\dfrac{1}{n-1+a_1}+\dfrac{1}{n-1+a_2}+\cdots+\dfrac{1}{n-1+a_n}\leqslant 1$;

(b) $\dfrac{1}{n-1+a_1^2}+\dfrac{1}{n-1+a_2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n-1+a_n^2}\leqslant 1$.

Bài tập 26. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{5a+4}}+\dfrac{1}{\sqrt{5b+4}}+\dfrac{1}{\sqrt{5c+4}}\leqslant 1$;

(b) $\dfrac{1}{a+\sqrt{3a+1}}+\dfrac{1}{b+\sqrt{3b+1}}+\dfrac{1}{c+\sqrt{3c+1}}\leqslant 1$.

Bài tập 27. Cho a_1, a_2, ..., $a_n>0$ thỏa mãn $a_1a_2\cdots a_n=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(n-1)a_1+1}+\frac{1}{(n-1)a_2+1}+\cdots+\frac{1}{(n-1)a_n+1}\geqslant 1.$$

3 Phương pháp sử dụng các bất đẳng thức kinh điển

3.1 Vài nét về công cụ các bất đẳng thức kinh điển

Có thể thấy bất đẳng thức kinh điển là một trong những công cụ được sử dụng nhiều nhất để giải toán bất đẳng thức. Lí do rất đơn giản, các lời giải bằng bất đẳng thức kinh điển thường không quá phức tạp, không đòi hỏi nhiều kiến thức để hiểu được chúng. Đặc biệt, chúng có thể được sử dụng làm công cụ phụ trợ cho các phương pháp khác để tăng thêm tính hiệu quả của các phương pháp đó. Từ những điều này ta thấy rằng bất đẳng thức kinh điển chiếm một vai trò quan trọng trong bất đẳng thức sơ cấp.

Có rất nhiều bất đẳng thức kinh điển như: AM-GM, Cauchy-Schwarz, Chebyshev, Bernoulli, Minkowski, ... Tuy nhiên, thông dụng nhất vẫn là hai bất đẳng thức AM-GM và Cauchy-Schwarz. Và đây cũng chính là 2 nội dung chính mà chúng ta sẽ cùng tìm hiểu ở phần này.

3.1.1 Bất đẳng thức AM-GM

Bất đẳng thức AM-GM có tên đầy đủ là *bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân*. Trong chương trình giáo khoa của nước ta, bất đẳng thức này được biết đến với cái tên *bất đẳng thức Cauchy*. Tuy nhiên, cách gọi tên đầu tiên mới là cách gọi tên theo đúng chuẩn quốc tế, và trong tài liệu này chúng ta sẽ sử dụng cách gọi chuẩn (vì cách gọi bất đẳng thức Cauchy dễ gây nhầm lẫn với bất đẳng thức Cauchy-Schwarz). Nội dung của bất đẳng thức được phát biểu như sau

Định lý 3 (Bất đẳng thức AM-GM). *Với mọi số thực không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ta có*

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Chứng minh. Nếu trong $a_1, a_2, \ldots, a_n$ có một số bằng 0 thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng, và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tất cả các số cùng bằng 0. Xét trường hợp $a_i > 0$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$. Khi đó, đặt $b_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}$ thì ta có $b_1b_2\cdots b_n = 1$ và bất đẳng thức được viết lại thành

$$b_1+b_2+\cdots+b_n \geqslant n.$$

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo n. Dễ thấy khẳng định hiển nhiên đúng với $n = 1$, do đó ta chỉ cần chứng minh: nếu khẳng định đúng với n thì cũng sẽ đúng với $n+1$, tức là

$$b_1+b_2+\cdots+b_n+b_{n+1} \geqslant n+1.$$

Do $b_1b_2\cdots b_nb_{n+1} = 1$ và $n+1 \geqslant 2$ nên trong $n+1$ số $b_1, b_2, \ldots, b_n, b_{n+1}$ sẽ có ít nhất một số không nhỏ hơn 1 và một số không lớn hơn 1. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $b_n \geqslant 1 \geqslant b_{n+1}$. Khi đó, dễ thấy $(b_n-1)(1-b_{n+1}) \geqslant 0$ nên ta có $b_n+b_{n+1} \geqslant b_nb_{n+1}+1$, và như thế ta chỉ cần chứng minh được

$$b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}+b_nb_{n+1} \geqslant n.$$

Tuy nhiên, kết quả này hiển nhiên đúng theo giả thiết quy nạp (áp dụng cho n số dương $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_nb_{n+1}$ có tích $b_1b_2\cdots b_{n-1}(b_nb_{n+1}) = 1$). □

Ở trên, ta đã chứng minh được bất đẳng thức AM-GM bằng cách sử dụng quy nạp. Cũng bằng công cụ này (kết hợp với một chút kiến thức về giải tích), ta có thể chứng minh kết quả tổng quát cho bất đẳng thức AM-GM như sau

Định lý 4 (Bất đẳng thức AM-GM suy rộng). *Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực không âm và $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực dương có tổng bằng 1. Khi đó, ta có*

$$x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_na_n \geqslant a_1^{x_1}a_2^{x_2}\cdots a_n^{x_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Chứng minh. Rõ ràng ta chỉ cần xét $a_i > 0$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$ là đủ. Với $n = 1$, bất đẳng thức đã cho trở thành đẳng thức. Xét $n = 2$, khi đó ta cần chứng minh

$$x_1a_1+x_2a_2 \geqslant a_1^{x_1}a_2^{x_2} \text{ với } a_1, a_2, x_1, x_2 > 0 \text{ và } x_1+x_2 = 1.$$

Cố định x_1, x_2, a_2 và xét hàm số $f(a_1) = x_1a_1+x_2a_2-a_1^{x_1}a_2^{x_2}$, ta có

$$f'(a_1) = x_1 - x_1a_1^{x_1-1}a_2^{x_2} = x_1 - x_1a_1^{-x_2}a_2^{x_2} = \frac{x_1(a_1^{x_2}-a_2^{x_2})}{a_2^{x_2}}.$$

Dễ thấy, $f'(a_1) = 0$ khi $a_1 = a_2$, $f'(a_1) > 0$ khi $a_1 > a_2$ và $f'(a_1) < 0$ khi $a_1 < a_2$. Do đó $f(a_1)$ đạt cực tiểu tại $a_1 = a_2$, từ đây ta suy ra $f(a_1) \geqslant f(a_2) = 0$, $\forall a_1 > 0$. Bây giờ, giả sử bất đẳng thức đúng với $n \geqslant 2$ và ta cần chứng minh nó cũng đúng với $n+1$, tức là

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n + x_{n+1}a_{n+1} \geqslant a_1^{x_1}a_2^{x_2}\cdots a_n^{x_n}a_{n+1}^{x_{n+1}}.$$

Áp dụng giả thiết quy nạp cho hai bộ n số dương $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n + x_{n+1}$ và $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n^{\frac{x_n}{x_n+x_{n+1}}}a_{n+1}^{\frac{x_{n+1}}{x_n+x_{n+1}}}$ (với chú ý rằng $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + (x_n + x_{n+1}) = 1$), ta có

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_{n-1}a_{n-1} + (x_n + x_{n+1})a_n^{\frac{x_n}{x_n+x_{n+1}}}a_{n+1}^{\frac{x_{n+1}}{x_n+x_{n+1}}} \geqslant$$
$$\geqslant a_1^{x_1}a_2^{x_2}\cdots a_{n-1}^{x_{n-1}}\left(a_n^{\frac{x_n}{x_n+x_{n+1}}}a_{n+1}^{\frac{x_{n+1}}{x_n+x_{n+1}}}\right)^{x_n+x_{n+1}} = a_1^{x_1}a_2^{x_2}\cdots a_n^{x_n}a_{n+1}^{x_{n+1}}.$$

Từ đó suy ra ta chỉ cần chứng minh

$$x_na_n + x_{n+1}a_{n+1} \geqslant (x_n + x_{n+1})a_n^{\frac{x_n}{x_n+x_{n+1}}}a_{n+1}^{\frac{x_{n+1}}{x_n+x_{n+1}}},$$

hay

$$\frac{x_n}{x_n + x_{n+1}}a_n + \frac{x_{n+1}}{x_n + x_{n+1}}a_{n+1} \geqslant a_n^{\frac{x_n}{x_n+x_{n+1}}}a_{n+1}^{\frac{x_{n+1}}{x_n+x_{n+1}}}.$$

Với chú ý rằng $\frac{x_n}{x_n+x_{n+1}} + \frac{x_{n+1}}{x_n+x_{n+1}} = 1$, ta có thể thấy ngay rằng đây chính là trường hợp $n = 2$ mà ta đã chứng minh ở trên. Phép chứng minh hoàn tất. □

Chú ý. Bất đẳng thức AM-GM suy rộng còn có thể được phát biểu dưới dạng sau: *Cho $2n$ số thực không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $x_1, x_2, \ldots, x_n$ với $x_1 + x_2 + \cdots + x_n > 0$. Khi đó, ta có*

$$\left(\frac{x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}\right)^{x_1+x_2+\cdots+x_n} \geqslant a_1^{x_1}a_2^{x_2}\cdots a_n^{x_n}.$$

3.1.2 Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz mà chúng ta được học trong chương trình phổ thông có nguồn gốc xuất phát từ một bất đẳng thức cùng tên trong Toán cao cấp. Cauchy là người đã đề ra và chứng minh nó đầu tiên vào năm 1821. Sau đó đến năm 1859, học trò của ông là Bunyakovsky đã tìm được cách mở rộng bất đẳng thức trên sang dạng tích phân. Và đến năm 1885 thì Schwarz đã chứng minh được kết quả tổng quát cho bất đẳng thức này.

Như vậy, xét theo quá trình phát triển thì tên gọi đúng của bất đẳng thức phải là bất đẳng thức Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz (đặt theo tên cả ba nhà Toán học cùng góp công phát triển) hay bất đẳng thức Cauchy-Scharz (đặt theo tên của hai nhà Toán học góp công lớn nhất). Tuy nhiên, trong tài liệu giáo khoa của nước ta, bất đẳng thức trên lại được gọi là bất đẳng thức Bunyakovsky. Điều này không thật chính xác, cách gọi tên Bunyakovsky chỉ thích hợp cho dạng tích phân của bất đẳng thức. Ở đây, chúng ta sẽ sử dụng tên gọi Cauchy-Schwarz theo chuẩn quốc tế. Ta có "dạng sơ cấp" của bất đẳng thức được phát biểu như sau

Định lý 5 (Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz). *Với hai dãy số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tùy ý, ta có bất đẳng thức*

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$. (Ở đây, ta sử dụng quy ước nếu mẫu bằng 0 thì tử cũng bằng 0.)

Chứng minh. Một trong các chứng minh đơn giản nhất cho bất đẳng thức này chính là dùng đồng nhất thức Lagrange như sau

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i^2b_j^2 + a_j^2b_i^2) - 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_ib_ia_jb_j$$
$$= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_ib_j - a_jb_i)^2 \geqslant 0.$$

Ở đây, chúng tôi xin được giới thiệu thêm một cách chứng minh khác cũng khá thú vị dựa trên bất đẳng thức AM-GM như sau: Rõ ràng ta chỉ cần xét bất đẳng thức trong trường hợp $\sum_{i=1}^n a_i^2 > 0$ và $\sum_{i=1}^n b_i^2 > 0$ là đủ. Lấy căn bậc hai hai vế của bất đẳng thức đã cho, sau đó chia cả hai vế cho $\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)}$, ta được

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{a_ib_i}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2)}}\right| \leqslant 1.$$

Sử dụng tính chất về dấu giá trị tuyệt đối kết hợp với bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{a_ib_i}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2)}}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i|\,|b_i|}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2)}} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \frac{b_i^2}{\sum_{i=1}^n b_i^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^2}{\sum_{i=1}^n b_i^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} (a_ib_i)(a_jb_j) \geqslant 0, \forall 1 \leqslant i < j \leqslant n \\ \dfrac{|a_i|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}} = \dfrac{|b_i|}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n \end{cases}$$

tức $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$. □

Ngoài ra, còn có một dạng khác cũng hay được sử dụng trong giải toán là

Định lý 6 (Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng phân thức). *Nếu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực và $y_1, y_2, \ldots, y_n$ là các số thực dương, thì*

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n} \geqslant \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_n}{y_n}$.

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{y_i}}\cdot\sqrt{y_i}\right)^2 \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\sqrt{y_i}}\right)^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{y_i})^2\right] = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{y_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right),$$

từ đó suy ra

$$\frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \cdots + y_n} \leqslant \frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{y_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{\frac{x_1}{\sqrt{y_1}}}{\sqrt{y_1}} = \cdots = \frac{\frac{x_n}{\sqrt{y_n}}}{\sqrt{y_n}}$, tức $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_n}{y_n}$. □

3.2 Các ví dụ minh họa

Cần chú ý rằng, để biết một đánh giá có hiệu quả cao hay không thì trước hết chúng ta phải xem xét xem đánh giá đó có giúp bài toán trở nên đơn giản hơn hay không? Bởi lẽ mục tiêu của ta khi thực hiện đánh giá cho các bài toán bất đẳng thức chung quy cũng chỉ là để đưa bài toán về dạng đơn giản hơn, từ đó sẽ dễ dàng hơn trong việc tìm được phương pháp thích hợp để xử lý.

Từ đây, ta thấy rằng khi sử dụng các bất đẳng thức kinh điển để đánh giá các bài toán khác thì ta nên chọn các đánh giá làm sao cho:

- Bậc của bất đẳng thức giảm đi: mất phân thức, hoặc có một số đại lượng nào đó bị lượt bớt đi sau đánh giá, ...;
- Các căn thức (nếu có) bị lượt bớt;
- Điều kiện đẳng thức của bài toán được đảm bảo.

Bây giờ, chúng ta sẽ đi vào các ví dụ ứng dụng cụ thể của hai bất đẳng thức AM-GM và Cauchy-Schwarz.

3.2.1 Ứng dụng của AM-GM trong chứng minh bất đẳng thức

Ví dụ 13. *Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c, ta đều có*

$$\frac{a^2}{b+2c}+\frac{b^2}{c+2a}+\frac{c^2}{a+2b}\geqslant\frac{a+b+c}{3}.$$

Chứng minh. Rất tự nhiên, ta muốn tìm cách đánh giá để loại bỏ đi các phân thức. Ta thấy rằng muốn loại đi mẫu số của $\frac{a^2}{b+2c}$ thì cần sử dụng AM-GM cho nó và một đại lượng có dạng $k(b+2c)$ (để triệt tiêu đi $b+2c$). Ngoài ra, ta cũng chú ý thêm rằng bất đẳng thức đã cho có dấu bằng khi $a=b=c$, khi ấy

$$\frac{a^2}{b+2c}=\frac{b+2c}{9}.$$

Do vậy, đánh giá mà ta nên chọn sẽ là

$$\frac{a^2}{b+2c}+\frac{b+2c}{9}\geqslant 2\sqrt{\frac{a^2}{b+2c}\cdot\frac{b+2c}{9}}=\frac{2}{3}a.$$

Từ đây suy ra

$$\frac{a^2}{b+2c}\geqslant\frac{2}{3}a-\frac{b+2c}{9}=\frac{6a-b-2c}{9}.$$

Thực hiện đánh giá tương tự, ta cũng có

$$\frac{b^2}{c+2a}\geqslant\frac{6b-c-2a}{9},\quad\frac{c^2}{a+2b}\geqslant\frac{6c-a-2b}{9}.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta có ngay điều phải chứng minh. □

Ví dụ 14 (IMOSL, 1998). *Cho $a, b, c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3}{(1+a)(1+b)}+\frac{b^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{c^3}{(1+c)(1+a)}\geqslant\frac{3}{4}.$$

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{a^3}{(1+a)(1+b)} + \frac{1+a}{8} + \frac{1+b}{8} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{(1+a)(1+b)} \cdot \frac{1+a}{8} \cdot \frac{1+b}{8}} = \frac{3}{4}a,$$

$$\frac{b^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{1+b}{8} + \frac{1+c}{8} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{b^3}{(1+b)(1+c)} \cdot \frac{1+b}{8} \cdot \frac{1+c}{8}} = \frac{3}{4}b,$$

$$\frac{c^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{1+c}{8} + \frac{1+a}{8} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{c^3}{(1+c)(1+a)} \cdot \frac{1+c}{8} \cdot \frac{1+a}{8}} = \frac{3}{4}c.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta được

$$\frac{a^3}{(1+a)(1+b)} + \frac{b^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{c^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{a+b+c+3}{4} \geqslant \frac{3}{4}(a+b+c),$$

hay tương đương

$$\frac{a^3}{(1+a)(1+b)} + \frac{b^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{c^3}{(1+c)(1+a)} \geqslant \frac{2(a+b+c)-3}{4}.$$

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức AM-GM thì $a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{abc} = 3$. Do đó, kết hợp với trên, ta có ngay điều phải chứng minh. □

Ví dụ 15. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương, ta đều có*

(*a*) $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant a^2b + b^2c + c^2a$;

(*b*) $a^6b + b^6c + c^6a \geqslant a^4b^2c + b^4c^2a + c^4a^2b$.

Chứng minh. **(a)** Quan sát bất đẳng thức cần chứng minh, ta thấy vế trái có dạng tổng của các lũy thừa, trong khi đó vế phải là tổng của các tích. Do đó, rất tự nhiên ta muốn sử dụng AM-GM đánh giá cho từng tích để chuyển về dạng tổng lũy thừa (vì bản chất của AM-GM là đưa tích về tổng và ngược lại). Từ đây, với chú ở điều kiện đẳng thức là $a = b = c$, ta tìm được các đánh giá sau

$$\frac{a^3+a^3+b^3}{3} \geqslant a^2b, \quad \frac{b^3+b^3+c^3}{3} \geqslant b^2c, \quad \frac{c^3+c^3+a^3}{3} \geqslant c^2a.$$

Cộng cả ba bất đẳng thức này lại, ta có ngay điều phải chứng minh.

(b) Ở bài này chúng ta cũng sẽ sử dụng ý tưởng tương tự nhưng phức tạp hơn một chút. Ta hy vọng tìm được các số thực không âm x, y, z sao cho sau khi sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho $xa^6b + yb^6c + zc^6a$ ta sẽ thu được a^4b^2c, và tại điểm đẳng thức của bài toán là $a = b = c$ thì $xa^6b + yb^6c + zc^6a = a^4b^2c$. Từ đây, có thể thấy ngay $x + y + z = 1$. Do đó, ta nghĩ ngay đến việc đánh giá $xa^6b + yb^6c + zc^6a$ bằng bất đẳng thức AM-GM suy rộng, cụ thể là

$$xa^6b + yb^6c + zc^6a \geqslant (a^6b)^x(b^6c)^y(c^6a)^z = a^{6x+z}b^{x+6y}c^{y+6z}.$$

Như thế, các số x, y, z cần tìm sẽ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 6x + z = 4 \\ x + 6y = 2 \\ y + 6z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $x = \frac{20}{31}$, $y = \frac{7}{31}$ và $z = \frac{4}{31}$. Với kết quả này, ta thu được một đánh giá là

$$\frac{20}{31}a^6b + \frac{7}{31}b^6c + \frac{4}{31}c^6a \geqslant a^4b^2c.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{4}{31}a^6b + \frac{20}{31}b^6c + \frac{7}{31}c^6a \geqslant b^4c^2a, \quad \frac{7}{31}a^6b + \frac{4}{31}b^6c + \frac{20}{31}c^6a \geqslant c^4a^2b.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta có ngay điều phải chứng minh. □

Đôi khi giả thiết, dạng phát biểu của các bài toán lại khá rườm rà, phức tạp. Những khi ấy ta có thể thử đổi biến để tìm hướng đánh giá thích hợp.

Ví dụ 16 (Trung Quốc, 2004). *Cho các số dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \frac{a+3c}{a+2b+c} + \frac{4b}{a+b+2c} - \frac{8c}{a+b+3c}.$$

Chứng minh. Biểu thức P được cho có hình thức khá phức tạp và nó tạo cho ta cảm giác rằng bài toán này rất khó. Từ đây, ta có ý tưởng là làm sao để "làm gọn" hơn biểu thức P và rất tự nhiên, ta nghĩ đến việc đổi biến: Đặt

$$\begin{cases} x = a+2b+c \\ y = a+b+2c \\ z = a+b+3c \end{cases}$$

thì ta có $a = 5y - x - 3z$, $b = x + z - 2y$, $c = z - y$ và

$$P = \frac{(5y-x-3z)+3(z-y)}{x} + \frac{4(z+x-2y)}{y} - \frac{8(z-y)}{y} = \frac{4x}{y} + \frac{2y}{x} + \frac{8y}{z} + \frac{4z}{y} - 17.$$

Từ đây, ta có thể tìm được ngay ý tưởng cho lời giải: ta sẽ áp dụng AM-GM lần lượt cho hai cặp số $\left(\frac{4x}{y}, \frac{2y}{x}\right)$ và $\left(\frac{8y}{z}, \frac{4z}{y}\right)$ để thu được

$$P \geqslant 2\sqrt{\frac{4x}{y} \cdot \frac{2y}{x}} + 2\sqrt{\frac{8y}{z} \cdot \frac{4z}{y}} - 17 = 12\sqrt{2} - 17.$$

Việc còn lại ta phải làm chỉ là đi xét điều kiện đẳng thức. Điều này không quá khó. Ta có đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{4x}{y} = \frac{2y}{x}$ và $\frac{8y}{z} = \frac{4z}{y}$, tức $z = \sqrt{2}y = 2x$. Từ đó, ta dễ dàng tìm được $a = \left(5\sqrt{2} - 7\right)x$, $b = \left(3 - 2\sqrt{2}\right)x$, $c = \left(2 - \sqrt{2}\right)x$. Bộ số này thỏa mãn điều kiện của đề bài, vì vậy ta đi đến kết luận $\min P = 12\sqrt{2} - 7$. □

Ví dụ 17. *Cho* $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ *và* $\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \cdots + \frac{1}{a_n+1} = 1$. *Chứng minh rằng*

$$a_1a_2\cdots a_n \geqslant (n-1)^n.$$

Chứng minh. Giả thiết của bài toán khá lạ lẫm tạo cho ta cảm giác khó khăn trong việc tìm cách sử dụng nó, do đó ta sẽ chuyển nó về dạng quen thuộc hơn thông qua các phép đặt ẩn mới: Đặt $x_i = \frac{1}{a_i+1}$ thì ta có $0 < x_i < 1$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$ và

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1.$$

Do $a_i = \frac{1-x_i}{x_i} = \frac{\sum_{j\neq i} x_j}{x_i}$ nên bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành[5]

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\sum_{j\neq i} x_j}{x_i} \geqslant (n-1)^n.$$

Đến đây thì ta có thể thấy ngay hướng giải cho bài toán, đó là sử dụng AM-GM đánh giá trực tiếp cho từng nhân tử ở vế trái, cụ thể là

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\sum_{j\neq i} x_j}{x_i} \geqslant \prod_{i=1}^{n} \frac{(n-1)\sqrt[n-1]{\prod_{j\neq i} x_j}}{x_i} = (n-1)^n.$$

Chú ý rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = \cdots = x_n$, tức $a_1 = \cdots = a_n = n-1$. □

Trong nhiều trường hợp, để có thể sử dụng được AM-GM, ta cần thêm hoặc bớt đi các lượng thích hợp rồi mới đánh giá thì mới thu được hiệu quả.

Ví dụ 18 (Bungari, 2003). *Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Chứng minh. Ở bài này, tư tưởng của chúng ta vẫn là tìm cách loại đi các phân thức. Tuy nhiên, nếu chúng ta sử dụng đánh giá AM-GM kiểu như các ví dụ 13, 14 thì sẽ không thu được hiệu quả cao, vì sau bước đánh giá, ta lại thu được một bất đẳng thức không đúng (bạn đọc có thể thử kiểm tra). Trong những trường hợp như vầy, chúng ta có thể thử sử dụng ý tưởng rất thú vị như sau

$$\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geqslant a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}.$$

Đánh giá tương tự, ta cũng có

$$\frac{b}{1+c^2} \geqslant b - \frac{bc}{2}, \quad \frac{c}{1+a^2} \geqslant c - \frac{ab}{2}.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geqslant a+b+c - \frac{ab+bc+ca}{2} = 3 - \frac{ab+bc+ca}{2}.$$

Mặt khác, ta biết rằng $ab+bc+ca \leqslant \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3$. Từ đây, kết hợp với đánh giá ở trên, ta có ngay kết quả cần chứng minh. □

Điểm đặc biệt của lời giải trên chính là ở chỗ, bằng một vài thêm bớt đơn giản, ta đã "dùng chính các lượng ở mẫu để khử mẫu" và đưa được bài toán về dạng đơn giản hơn. Đây là một kinh nghiệm thú vị để sử dụng bất đẳng thức AM-GM.

Ví dụ 19. *Chứng minh rằng với mọi $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$, ta đều có*

$$\frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geqslant 1.$$

[5] Ở đây, để cho gọn ta quy ước $\sum_{j\neq i} x_j$ là $\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_j$, chẳng hạn $\sum_{j\neq 1} x_j = x_2 + x_3 + \cdots + x_n$. Tương tự như vậy cho tích $\prod_{j\neq i} x_j$.

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{a^2}{a+2b^2} = a - \frac{2ab^2}{a+b^2+b^2} \geqslant a - \frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{ab^4}} = a - \frac{2}{3}\sqrt[3]{(ab)^2} \geqslant a - \frac{2}{9}(2ab+1).$$

Tương tự,

$$\frac{b^2}{b+2c^2} \geqslant b - \frac{2}{9}(2bc+1), \quad \frac{c^2}{c+2a^2} \geqslant c - \frac{2}{9}(2ca+1).$$

Từ đó đưa đến

$$\frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geqslant a+b+c - \frac{2}{9}\left[2(ab+bc+ca)+3\right] \geqslant 3 - \frac{2}{9}(2\cdot 3+3) = 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Trong các ví dụ trên, ta chủ yếu thực hiện các đánh giá thông qua sự đoán biết trước về dấu đẳng thức của bài toán. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp, việc dự đoán điều kiện đẳng thức không đơn giản như vậy. Ta không thể chỉ dựa vào cảm tính hay một vài con tính mà có thể tìm ra ngay dấu đẳng thức. Để thực hiện được việc ấy, đôi khi chúng ta phải trải qua cả một quá trình dài.

Có nhiều công cụ giúp dự đoán dấu đẳng thức, mỗi cái có những ưu, nhược điểm khác nhau tùy thuộc vào trường hợp áp dụng. Đối với bất đẳng thức AM-GM, ta có thể tìm được dấu đẳng thức bằng cách sử dụng phép "cân bằng hệ số". Ý tưởng chính của nó như sau: Ta sẽ *giả định* đẳng thức xảy ra tại một bộ nào đó và cứ tiến hành đánh giá bình thường (dựa vào các suy luận thích hợp), để rồi cuối cùng ta sẽ tiến hành chọn lựa bộ số sao cho các đánh giá đều đạt được đẳng thức tại bộ số đó là được (có thể chúng ta sẽ phải giải nhiều phương trình, hệ phương trình thì mới thu được kết quả).

Ví dụ 20. *Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = x^2 + 2y^2 + 5z^2.$$

Lời giải. Để tìm $\min P$, ta mong muốn có một bất đẳng thức dạng

$$x^2 + 2y^2 + 5z^2 \geqslant k(xy+yz+zx) \quad (k > 0),$$

để từ đó sử dụng giả thiết $xy + yz + zx = 1$ và suy ra kết quả nếu dấu bằng xảy ra.

Từ đây, ta có một ý tưởng rất tự nhiên, đó là ta sẽ đánh giá AM-GM cho các đại lượng xy, yz, zx để có x^2, y^2, z^2 xuất hiện và ta sẽ lựa chọn đánh giá thích hợp sao cho sau bước đánh giá, hai vế trở nên đồng nhất với nhau. Ta làm như sau: Giả sử khi P đạt giá trị nhỏ nhất thì $x = a$, $y = b$, $z = c$ ($a, b, c > 0$, $ab + bc + ca = 1$). Lúc này các đánh giá sau sẽ đảm bảo được dấu đẳng thức của bài toán

$$2xy \leqslant \frac{b}{a}x^2 + \frac{a}{b}y^2, \quad 2yz \leqslant \frac{c}{b}y^2 + \frac{b}{c}z^2, \quad 2zx \leqslant \frac{a}{c}z^2 + \frac{c}{a}x^2.$$

Do đó

$$2 = 2(xy+yz+zx) \leqslant \left(\frac{b}{a}x^2 + \frac{a}{b}y^2\right) + \left(\frac{c}{b}y^2 + \frac{b}{c}z^2\right) + \left(\frac{a}{c}z^2 + \frac{c}{a}x^2\right)$$
$$= \frac{b+c}{a}x^2 + \frac{c+a}{b}y^2 + \frac{a+b}{c}z^2.$$

Như vậy, ta chỉ cần chọn các số dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$ sao cho các số $\frac{b+c}{a}$, $\frac{c+a}{b}$, $\frac{a+b}{c}$ tương ứng lập thành tỉ lệ $1:2:5$ là được. Điều này có nghĩa là "điểm cực trị" của bài toán chính là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a,\, b,\, c > 0 \\ ab+bc+ca = 1 \\ \dfrac{b+c}{a} = \dfrac{c+a}{2b} = \dfrac{a+b}{5c} \end{cases}$$

Giải hệ này, ta được $a = \frac{3}{\sqrt{11}}$, $b = \frac{2}{\sqrt{11}}$, $c = \frac{1}{\sqrt{11}}$. Và lúc này thì $\frac{b+c}{a} = 1$, $\frac{c+a}{b} = 2$, $\frac{a+b}{c} = 5$. Do đó, thay vào trên, ta thu được ngay

$$P = x^2 + 2y^2 + 5z^2 \geqslant 5,$$

với đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{3}{\sqrt{11}}$, $y = \frac{2}{\sqrt{11}}$, $z = \frac{1}{\sqrt{11}}$. □

Ví dụ 21 (Việt Nam, 2001). *Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $2x+4y+7z = 2xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = x + y + z.$$

Lời giải. Khi giải bài này, một cách tự nhiên, ta mong muốn có một đánh giá ở dạng thuần nhất như sau

$$(x+y+z)^2(2x+4y+7z) \geqslant kxyz,$$

để từ đó, sử dụng được giả thiết $2x+4y+7z = 2xyz$ kết hợp với việc đẳng thức có thể xảy ra (ta cần có điều này), ta suy ra ngay kết quả cần tìm.

Bây giờ, ta quan sát tiếp bất đẳng thức thuần nhất trên và thấy rằng: vế trái có dạng tích của các tổng, còn vế phải lại là tích của các biến số. Chính từ dữ kiện này đã gợi cho ta nghĩ đến việc *sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho từng tổng ở bên vế trái để chuyển đổi chúng về dạng tích* (vì bản chất của AM-GM là như vậy). Nhưng như đã nói ở trên, ta chưa biết dấu đẳng thức xảy ra tại đâu và vì thế, việc đánh giá sẽ không thuận lợi như các bài toán thông thường. Tốt nhất là ta nên sử dụng phép giả định về dấu đẳng thức để tránh đi mọi rủi ro có thể mắc phải: Giả sử P đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = a$, $y = b$ và $z = c$. Khi đó, ta phải có a, b, $c > 0$ và

$$2a + 4b + 7c = 2abc. \tag{1}$$

Dễ thấy khi P đạt min thì $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = 1$, và ta có thể viết được các biểu thức $x+y+z$ và $2x+4y+7z$ lại thành

$$x+y+z = a\cdot\frac{x}{a} + b\cdot\frac{y}{b} + c\cdot\frac{z}{c}, \quad 2x+4y+7z = 2a\cdot\frac{x}{a} + 4b\cdot\frac{y}{b} + 7c\cdot\frac{z}{c}.$$

(Ta tách như thế này để đưa từ trường hợp đẳng thức với các biến lệch nhau về trường hợp các biến bằng nhau, như thế thì việc xét sẽ dễ dàng hơn). Ta cần sử dụng AM-GM để biến đổi tổng thành tích, thế nhưng ta lại chưa biết các hệ số a, b, c và $2a$, $4b$, $7c$ ở đây có phải là số hữu tỉ hay không. Do đó, muốn chuyển tổng thành tích thì ta không thể sử dụng bất đẳng thức AM-GM dạng thông thường mà phải là dạng suy rộng, và để đảm bảo được đẳng thức, cách đánh giá hợp lý nhất chính là

$$a\cdot\frac{x}{a} + b\cdot\frac{y}{b} + c\cdot\frac{z}{c} \geqslant (a+b+c)\left[\left(\frac{x}{a}\right)^a\left(\frac{y}{b}\right)^b\left(\frac{z}{c}\right)^c\right]^{\frac{1}{a+b+c}},$$

$$2a\cdot\frac{x}{a} + 4b\cdot\frac{y}{b} + 7c\cdot\frac{z}{c} \geqslant (2a+4b+7c)\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2a}\left(\frac{y}{b}\right)^{4b}\left(\frac{z}{c}\right)^{7c}\right]^{\frac{1}{2a+4b+7c}}.$$

Từ hai đánh giá này suy ra

$$\begin{aligned}&(x+y+z)^2(2x+4y+7z) \geqslant \\ &\geqslant (a+b+c)^2(2a+4b+7c)\left[\left(\frac{x}{a}\right)^a\left(\frac{y}{b}\right)^b\left(\frac{z}{c}\right)^c\right]^{\frac{2}{a+b+c}}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2a}\left(\frac{y}{b}\right)^{4b}\left(\frac{z}{c}\right)^{7c}\right]^{\frac{1}{2a+4b+7c}} \\ &= A\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2a}{a+b+c}+\frac{2a}{2a+4b+7c}}\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2b}{a+b+c}+\frac{4b}{2a+4b+7c}}\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2c}{a+b+c}+\frac{7c}{2a+4b+7c}},\end{aligned}$$

trong đó $A = (a+b+c)^2(2a+4b+7c)$.

Cái mà ta cần là một đánh giá dạng $(x+y+z)^2(2x+4y+7z) \geqslant kxyz$ để có thể từ đó sử dụng giả thiết mà suy ra kết quả bài toán. Do đó, ta phải chọn các số a, b, c thích hợp sao cho số mũ của x, y, z đều bằng 1, tức là

$$\begin{cases} \dfrac{2a}{a+b+c} + \dfrac{2a}{2a+4b+7c} = 1 \\ \dfrac{2b}{a+b+c} + \dfrac{4b}{2a+4b+7c} = 1 \\ \dfrac{2c}{a+b+c} + \dfrac{7c}{2a+4b+7c} = 1 \end{cases} \tag{2}$$

Từ (1) và (2), ta tìm được $a = 3$, $b = \frac{5}{2}$ và $c = 2$. Lúc này ta có

$$(x+y+z)^2(2x+4y+7z) \geqslant (a+b+c)^2(2a+4b+7c)\left(\frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{b}\right)\left(\frac{z}{c}\right).$$

Do đó

$$P^2 = (x+y+z)^2 \geqslant \frac{(a+b+c)^2(2a+4b+7c)xyz}{abc(2x+4y+7z)} = (a+b+c)^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2,$$

từ đây suy ra $P \geqslant \frac{15}{2}$ với đẳng thức xảy ra khi $x = a = 3$, $y = b = \frac{5}{2}$ và $z = c = 2$. □

3.2.2 Ứng dụng của Cauchy-Schwarz trong chứng minh bất đẳng thức

Chúng ta sẽ bắt đầu phần này bằng một vài ví dụ đơn giản sau (ở đó ta có thể sử dụng trực tiếp Cauchy-Schwarz để giải mà không cần phải suy xét nhiều)

Ví dụ 22. *Cho hai số thực x, y thỏa mãn $3x^2 + 4y^2 = 5$. Chứng minh rằng*

$$2x + y \leqslant \sqrt{\frac{95}{12}}.$$

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$(2x+y)^2 = \left(\sqrt{3}x \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} + 2y \cdot \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant (3x^2+4y^2)\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{4}\right) = 5 \cdot \frac{19}{12} = \frac{95}{12},$$

từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Ví dụ 23. *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geqslant 1.$$

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}=\frac{a^2}{a(b+2c)}+\frac{b^2}{b(c+2a)}+\frac{c^2}{c(a+2b)} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{a(b+2c)+b(c+2a)+c(a+2b)}.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ca).$$

Tuy nhiên, đây lại là một kết quả quen thuộc. □

Ví dụ 24. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương, bất đẳng thức sau đúng*

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}.$$

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geqslant \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a(a^2+ab+b^2)+b(b^2+bc+c^2)+c(c^2+ca+a^2)}.$$

Mặt khác, dễ thấy $a(a^2+ab+b^2)+b(b^2+bc+c^2)+c(c^2+ca+a^2)=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$, do đó kết hợp với trên, ta có ngay kết quả cần chứng minh. □

Bây giờ, chúng ta sẽ cùng đến với các bài toán đặc biệt hơn một chút:

Ví dụ 25. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương, ta đều có*

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geqslant 3(a+b+c)^2.$$

Chứng minh. Nhận xét rằng đây là một bất đẳng thức không thuần nhất và các biến a, b, c độc lập với nhau. Ta muốn dùng Cauchy-Schwarz để đánh giá bất đẳng thức này. Muốn vậy, bạn hãy nhớ lại mục đích chính của ta trong mọi đánh giá là đưa bài toán về đơn giản nhất có thể. Vì ba biến a, b, c độc lập với nhau nên một cách tự nhiên, ta muốn tìm cách đánh giá để làm giảm đi số biến. Sự xuất hiện của a^2+2 gợi cho ta nghĩ đến việc sử dụng Cauchy-Schwarz cho đại lượng $(a+b+c)^2$ như sau

$$(a+b+c)^2 \leqslant (a^2+2)\left[1+\frac{(b+c)^2}{2}\right]. \tag{1}$$

Và như thế ta có thể đưa bài toán về chứng minh một bất đẳng thức hai biến là

$$(b^2+2)(c^2+2) \geqslant 3\left[1+\frac{(b+c)^2}{2}\right]. \tag{2}$$

Hơn nữa ta có thể chắc chắn rằng (2) luôn đúng. Từ điều kiện đẳng thức của bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta thấy (1) xảy ra đẳng thức khi $a=\frac{2}{b+c}$. Do bất đẳng thức đã cho đúng với mọi a, b, c bất kỳ nên nó cũng phải đúng với $a=\frac{2}{b+c}$, tức (2) phải đúng (vì khi $a=\frac{2}{b+c}$

thì bất đẳng thức đã cho trở thành (2)). Bây giờ bằng cách khai triển trực tiếp, ta có thể viết được bất đẳng thức (2) dưới dạng

$$\frac{b^2+c^2}{2}+b^2c^2-3bc+1 \geqslant 0.$$

Bất đẳng thức này đúng vì $\frac{b^2+c^2}{2} \geqslant bc$ và $bc+b^2c^2-3bc+1=(bc-1)^2 \geqslant 0$. □

Ví dụ 26. *Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c, ta có*

$$\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+c)^2} \geqslant \frac{1}{a^2+bc}.$$

Chứng minh. Ta có nhận xét rằng "nếu ta áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz cho các bình phương $(a+b)^2$, $(a+c)^2$ sao cho đại lượng a^2+bc xuất hiện thì bậc của bất đẳng thức sẽ được giảm đáng kể". Điều đó sẽ có lợi cho ta trong việc giải bài toán đã cho. Tiến hành theo ý tưởng này, ta được

$$(a^2+bc)\left(1+\frac{b}{c}\right) \geqslant (a+b)^2,$$

từ đó dẫn đến

$$\frac{1}{(a+b)^2} \geqslant \frac{c}{(b+c)(a^2+bc)}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$\frac{1}{(a+c)^2} \geqslant \frac{b}{(b+c)(a^2+bc)}.$$

Cộng tương ứng vế với vế hai bất đẳng thức này, ta được

$$\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+c)^2} \geqslant \frac{c}{(b+c)(a^2+bc)}+\frac{b}{(b+c)(a^2+bc)}=\frac{1}{a^2+bc}.$$

Đẳng thức xảy ra đẳng thức khi $a=b=c$. □

Ví dụ 27. *Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$\frac{1}{a+b+c} \geqslant \frac{a^3}{(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)}+\frac{b^3}{(2b^2+c^2)(2b^2+a^2)}+\frac{c^3}{(2c^2+a^2)(2c^2+b^2)}.$$

Chứng minh. Tương tự như bài trước, ta muốn áp dụng Cauchy-Schwarz cho các mẫu số của từng phân thức bên vế phải sao cho đại lượng $a+b+c$ xuất hiện sau khi đánh giá. Với ý tưởng như vậy, ta sử dụng Cauchy-Schwarz như sau

$$(a^2+b^2+a^2)(a^2+a^2+c^2) \geqslant (a^2+ba+ac)^2=a^2(a+b+c)^2.$$

Từ đây ta suy ra

$$\frac{a^3}{(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)} \leqslant \frac{a}{(a+b+c)^2}.$$

Cộng bất đẳng thức này với hai bất đẳng thức tương tự

$$\frac{b^3}{(2b^2+c^2)(2b^2+a^2)} \leqslant \frac{b}{(a+b+c)^2}, \quad \frac{c^3}{(2c^2+a^2)(2c^2+b^2)} \leqslant \frac{c}{(a+b+c)^2},$$

ta thu được ngay kết quả bài toán. Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

Cũng giống như bất đẳng thức AM-GM và nhiều bất đẳng thức kinh điển khác, trong nhiều trường hợp ta không thể dùng Cauchy-Schwarz đánh giá ngay mà phải trải qua nhiều giai đoạn biến đổi (thêm-bớt) thì mới thành công được. Hãy thử xét ví dụ sau:

Ví dụ 28. *Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}\geqslant 3.$$

Chứng minh. Nếu ta áp dụng Cauchy-Schwarz trực tiếp như thông thường

$$\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}\geqslant \frac{9}{(2-a)+(2-b)+(2-c)}$$

thì sẽ phản tác dụng bởi vì $\frac{9}{6-(a+b+c)}\leqslant 3$, trong khi cái mà ta cần là chiều ngược lại. Như thế, có vẻ như bất đẳng thức Cauchy-Schwarz không hiệu quả với bài toán này? Thật ra không phải vậy. Hãy cùng xem xét ý tưởng sau: Ta sẽ tìm một số $m>0$ thích hợp sao cho

$$\frac{1}{2-a}-m=\frac{1-m(2-a)}{2-a}$$

có tử số $1-m(2-a)$ của nó là một số dương và đánh giá này càng chặt càng tốt. Có thể thấy số m đó là $\frac{1}{2}$ bởi vì $1-\frac{2-a}{2}=\frac{a}{2}>0$ và đây là một đánh giá chặt do $\frac{a}{2}\to 0$ khi $a\to 0$.

Bây giờ sau khi tìm được m, ta thực hiện biến đổi bất đẳng thức như sau

$$\left(\frac{1}{2-a}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2-b}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2-c}-\frac{1}{2}\right)\geqslant\frac{3}{2},$$

$$\frac{a}{2-a}+\frac{b}{2-b}+\frac{c}{2-c}\geqslant 3.$$

Ta sẽ sử dụng Cauchy-Schwarz sao cho giả thiết $a^2+b^2+c^2=3$ được tận dụng tối đa, tức là

$$\sum\frac{a}{2-a}=\frac{a^4}{a^3(2-a)}+\frac{b^4}{b^3(2-b)}+\frac{c^4}{c^3(2-c)}\geqslant\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^3(2-a)+b^3(2-b)+c^3(2-c)}.$$

Từ đó ta có thể đưa bài toán về chứng minh

$$3\geqslant 2(a^3+b^3+c^3)-(a^4+b^4+c^4).$$

Việc chứng minh bất đẳng thức này khá đơn giản, ta có thể sử dụng AM-GM như sau

$$2a^3-a^4\leqslant(a^4+a^2)-a^4=a^2.$$

Và bằng việc cộng bất đẳng thức này với các bất đẳng thức tương tự rồi sử dụng giả thiết của đề bài, ta thu được ngay kết quả như trên. □

Nhận xét 1. Thoạt nhìn thì đây là một kỹ thuật đơn giản nhưng nó lại rất hiệu quả và rất hay được sử dụng trong chứng minh bất đẳng thức.

Nhận xét 2. Ngoài ra, ta còn có thể áp dụng Cauchy-Schwarz theo kiểu khác để chứng minh bất đẳng thức $\frac{a}{2-a}+\frac{b}{2-b}+\frac{c}{2-c}\geqslant 1$ như sau

$$\frac{a}{2-a}+\frac{b}{2-b}+\frac{c}{2-c}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{a(2-a)+b(2-b)+c(2-c)}=\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)-3}.$$

Sử dụng đánh giá này, ta chỉ cần chứng minh được bất đẳng thức sau nữa là đủ

$$(a+b+c)^2 \geqslant 3\big[2(a+b+c)-3\big].$$

Nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng do

$$(a+b+c)^2 - 6(a+b+c) + 9 = (a+b+c-3)^2 \geqslant 0.$$

Ví dụ 29. *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{3a-b+c} + \frac{b}{3b-c+a} + \frac{c}{3c-a+b} \geqslant 1.$$

Chứng minh. Ta có bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\left(\frac{a}{3a-b+c} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{b}{3b-c+a} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{c}{3c-a+b} - \frac{1}{4}\right) \geqslant \frac{1}{4}$$

$$\frac{a+b-c}{3a-b+c} + \frac{b+c-a}{3b-c+a} + \frac{c+a-b}{3c-a+b} \geqslant 1.$$

Do $a+b-c>0$, $b+c-a>0$ và $c+a-b>0$ nên theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{a+b-c}{3a-b+c} + \frac{b+c-a}{3b-c+a} + \frac{c+a-b}{3c-a+b} \geqslant \frac{\big[(a+b-c)+(b+c-a)+(c+a-b)\big]^2}{\sum (a+b-c)(3a-b+c)}$$

$$= \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)} = 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

Đôi khi, bằng việc phát hiện ra những hằng đẳng thức đặc biệt, ta có thể thu được nhiều lời giải thú vị từ Cauchy-Schwarz. Sau đây là một số ví dụ:

Ví dụ 30 (Singapore, 2003). *Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{bc}{2a+b+c} + \frac{ca}{2b+c+a} + \frac{ab}{2c+a+b} \leqslant \frac{a+b+c}{4}.$$

Chứng minh. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{1}{2a+b+c} = \frac{1}{(a+b)+(a+c)} \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c}\right).$$

Từ đó suy ra

$$\frac{bc}{2a+b+c} \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{c+a}\right).$$

Cộng bất đẳng thức này với hai bất đẳng thức tương tự

$$\frac{ca}{2b+c+a} \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{ca}{b+c} + \frac{ca}{a+b}\right), \quad \frac{ab}{2c+a+b} \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{ab}{c+a} + \frac{ab}{b+c}\right),$$

ta được

$$\frac{bc}{2a+b+c} + \frac{ca}{2b+c+a} + \frac{ab}{2c+a+b} \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{bc+ca}{a+b} + \frac{bc+ab}{c+a} + \frac{ca+ab}{b+c}\right)$$

$$= \frac{a+b+c}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

Ví dụ 31. *Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương, ta đều có*

$$\frac{a}{4a+4b+c}+\frac{b}{4b+4c+a}+\frac{c}{4c+4a+b}\leqslant\frac{1}{3}.$$

Chứng minh. Nhân cả hai vế của bất đẳng thức đã cho với $4a+4b+4c$ và chú ý rằng

$$\frac{a(4a+4b+4c)}{4a+4b+c}=a+\frac{3ca}{4a+4b+c},$$

ta viết được nó dưới dạng

$$\frac{9ca}{4a+4b+c}+\frac{9ab}{4b+4c+a}+\frac{9bc}{4c+4a+b}\leqslant a+b+c.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{9}{4a+4b+c}=\frac{(2+1)^2}{2(2a+b)+(2b+c)}\leqslant\frac{2}{2a+b}+\frac{1}{2b+c},$$

do đó

$$\frac{9ca}{4a+4b+c}\leqslant\frac{2ca}{2a+b}+\frac{ca}{2b+c}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$\frac{9ab}{4b+4c+a}\leqslant\frac{2ab}{2b+c}+\frac{ab}{2c+a},\quad\frac{9bc}{4c+4a+b}\leqslant\frac{2bc}{2c+a}+\frac{bc}{2a+b}.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế, ta được

$$\begin{aligned}\frac{9ca}{4a+4b+c}+\frac{9ab}{4b+4c+a}+\frac{9bc}{4c+4a+b}&\leqslant\frac{2ca+bc}{2a+b}+\frac{ca+2ab}{2b+c}+\frac{ab+2bc}{2c+a}\\&=a+b+c.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. □

Một kinh nghiệm nữa để sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz thành công là đổi biến. Có những bài toán rất đặc biệt, thoạt nhìn chúng chẳng có dấu hiệu gì của Cauchy-Schwarz cả, tuy nhiên sau một vài phép đổi biến thì những dấu hiệu ấy lại hiện ra và ta thu được những lời giải rất đẹp bằng Cauchy-Schwarz.

Ví dụ 32. *Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{1+x+x^2}+\frac{1}{1+y+y^2}+\frac{1}{1+z+z^2}\geqslant 1.$$

Chứng minh. Do x, y, $z>0$ và $xyz=1$ nên tồn tại a, b, $c>0$ sao cho $x=\frac{bc}{a^2}$, $y=\frac{ca}{b^2}$ và $z=\frac{ab}{c^2}$ (chẳng hạn, ta có thể chọn $a=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $b=\frac{1}{\sqrt[3]{y}}$ và $c=\frac{1}{\sqrt[3]{z}}$). Thay vào, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{a^4}{a^4+a^2bc+b^2c^2}+\frac{b^4}{b^4+b^2ca+c^2a^2}+\frac{c^4}{c^4+c^2ab+a^2b^2}\geqslant 1.$$

Bây giờ, sử dụng các bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{a^4}{a^4+a^2bc+b^2c^2}+\frac{b^4}{b^4+b^2ca+c^2a^2}+\frac{c^4}{c^4+c^2ab+a^2b^2}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^4+a^2bc+b^2c^2)+(b^4+b^2ca+c^2a^2)+(c^4+c^2ab+a^2b^2)}.$$

Từ đó, bài toán được đưa về chứng minh

$$(a^2+b^2+c^2)^2\geqslant(a^4+b^4+c^4)+abc(a+b+c)+(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2),$$

hay tương đương

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant abc(a+b+c).$$

Vì đây là một kết quả quen thuộc nên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$, tức $x=y=z=1$. □

Ví dụ 33 (Trung Quốc, 2005). *Cho $x,\ y,\ z,\ t>0$ và $xyzt=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}\geqslant 1.$$

Chứng minh. Ta có ba cách chứng minh như sau:

(a) *Cách 1.* Đặt $x=\frac{bc}{a^2}$, $y=\frac{cd}{b^2}$, $z=\frac{da}{c^2}$ và $t=\frac{ab}{d^2}$ với $a,\ b,\ c,\ d>0$ (chú ý rằng các số $a,\ b,\ c,\ d$ luôn tồn tại, chẳng hạn chọn $a=1$, $b=\sqrt[5]{\frac{x^2}{y^2t}}$, $c=\sqrt[5]{x^3y^2t}$, $d=\sqrt[5]{\frac{x}{yt^3}}$ thì các hệ thức trên được thỏa mãn). Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{a^4}{(a^2+bc)^2}+\frac{b^4}{(b^2+cd)^2}+\frac{c^4}{(c^2+da)^2}+\frac{d^4}{(d^2+ab)^2}\geqslant 1.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{a^4}{(a^2+bc)^2}+\frac{c^4}{(c^2+da)^2}\geqslant\frac{a^4}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}+\frac{c^4}{(c^2+d^2)(c^2+a^2)}$$
$$\geqslant\frac{(a^2+c^2)^2}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)+(c^2+d^2)(c^2+a^2)}$$
$$=\frac{a^2+c^2}{a^2+b^2+c^2+d^2}.$$

Đánh giá tương tự, ta cũng có

$$\frac{b^4}{(b^2+cd)^2}+\frac{d^4}{(d^2+ab)^2}\geqslant\frac{b^2+d^2}{a^2+b^2+c^2+d^2}.$$

Cộng hai bất đẳng thức trên lại theo vế, ta có ngay kết quả cần chứng minh. Chú ý rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=t=1$. □

(b) *Cách 2.* Ta thấy rằng tồn tại $a,\ b,\ c,\ d>0$ sao cho $x=\frac{b}{a}$, $y=\frac{c}{b}$, $z=\frac{d}{c}$ và $t=\frac{a}{d}$ (chẳng hạn $a=1$, $b=x$, $c=xy$, $d=xyz$). Thay vào, bất đẳng thức đã cho được viết lại thành

$$\frac{a^2}{(a+b)^2}+\frac{b^2}{(b+c)^2}+\frac{c^2}{(c+d)^2}+\frac{d^2}{(d+a)^2}\geqslant 1.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz kết hợp với bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$VT \geqslant \frac{\left[a(a+d)+b(b+a)+c(c+b)+d(d+c)\right]^2}{(a+b)^2(a+d)^2+(b+c)^2(b+a)^2+(c+d)^2(c+b)^2+(d+a)^2(d+b)^2}$$
$$= \frac{\left[a(a+d)+b(b+a)+c(c+b)+d(d+c)\right]^2}{\left[(a+b)^2+(c+d)^2\right]\left[(a+d)^2+(b+c)^2\right]}$$
$$= \frac{\left[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2+(d+a)^2\right]^2}{4\left[(a+b)^2+(c+d)^2\right]\left[(a+d)^2+(b+c)^2\right]} \geqslant 1.$$

Và như vậy, phép chứng minh được hoàn tất. □

(c) *Cách 3.* Do $x, y, z, t > 0$ và $xyzt = 1$ nên tồn tại các số thực dương a, b, c, d sao cho $x = \frac{bcd}{a^3}$, $y = \frac{cda}{b^3}$, $z = \frac{dab}{c^3}$ và $t = \frac{abc}{d^3}$ (chẳng hạn, ta chọn $a = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, $b = \frac{1}{\sqrt[4]{y}}$, $c = \frac{1}{\sqrt[4]{z}}$ và $d = \frac{1}{\sqrt[4]{t}}$). Thay vào, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{a^6}{(a^3+bcd)^2}+\frac{b^6}{(b^3+cda)^2}+\frac{c^6}{(c^3+dab)^2}+\frac{d^6}{(d^3+abc)^2} \geqslant 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{a^6}{(a^3+bcd)^2}+\frac{b^6}{(b^3+cda)^2}+\frac{c^6}{(c^3+dab)^2}+\frac{d^6}{(d^3+abc)^2} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{(a^3+b^3+c^3+d^3)^2}{(a^3+bcd)^2+(b^3+cda)^2+(c^3+dab)^2+(d^3+abc)^2}.$$

Từ đó suy ra, ta chỉ cần chứng minh

$$(a^3+b^3+c^3+d^3)^2 \geqslant (a^3+bcd)^2+(b^3+cda)^2+(c^3+dab)^2+(d^3+abc)^2,$$

hay tương đương[6]

$$2\sum_{sym} a^3b^3 \geqslant 2\sum a^3bcd + \sum b^2c^2d^2.$$

Bất đẳng thức này đúng do theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$2\sum a^3bcd \leqslant \frac{2}{3}\sum a^3(b^3+c^3+d^3) = \frac{4}{3}\sum_{sym} a^3b^3$$

và

$$\sum b^2c^2d^2 \leqslant \frac{1}{3}\sum (b^3c^3+c^3d^3+d^3b^3) = \frac{2}{3}\sum_{sym} a^3b^3.$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Khi giải toán ta sẽ gặp phải một số bất đẳng thức mà nếu sử dụng Cauchy-Schwarz theo kiểu thông thường sẽ không đi đến kết quả. Một trong các nguyên nhân có thể của sự thất bại ấy chính là ta đã không đảm bảo được dấu đẳng thức của bài toán. Có thể ở các bài toán ấy, việc dự đoán dấu đẳng thức không dễ dàng như các bài toán thông thường. Tất nhiên khi ấy, các

[6]Ở đây $\sum_{sym} a^3b^3 = a^3b^3+a^3c^3+a^3d^3+b^3c^3+b^3d^3+c^3d^3$.

đánh giá của ta rất dễ "đi sai hướng". Lúc bấy giờ, cũng giống như AM-GM, để các đánh giá Cauchy-Schwarz trở nên "chắc chắn" hơn, ta có thể sử dụng phép cân bằng hệ số. Ý tưởng ở đây vẫn là giả định trước bộ điểm cực trị và tiến hành đánh giá như bình thường, sau đó ta sẽ đi tìm điều kiện để các đánh giá xảy ra dấu bằng tại chung điểm đó (thông qua việc giải hệ phương trình).

Ví dụ 34. *Cho hai số thực x và y thỏa mãn $2x - y = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2}.$$

Lời giải. Quan sát đề bài, chúng ta có thấy ngay ý tưởng để giải bài này là dùng Cauchy-Schwarz nhưng ta lại không biết đẳng thức xảy ra tại đâu và dạng phát biểu của bài toán cũng không gợi cho ta điều gì. Chính vì vậy, ta nghĩ đến việc sử dụng phép giả định dấu bằng: Giả sử P đạt min tại $x = a$ và $y = b$ với $2a - b = 2$. Khi đó, ta có các đánh giá sau sẽ đảm bảo được điều kiện đẳng thức

$$\sqrt{x^2 + (y+1)^2} \geqslant \frac{ax + (b+1)(y+1)}{\sqrt{a^2 + (b+1)^2}}, \quad \sqrt{x^2 + (y-3)^2} \geqslant \frac{ax + (b-3)(y-3)}{\sqrt{a^2 + (b-3)^2}}.$$

Từ đây suy ra

$$\begin{aligned} P &\geqslant \frac{ax + (b+1)(y+1)}{\sqrt{a^2 + (b+1)^2}} + \frac{ax + (b-3)(y-3)}{\sqrt{a^2 + (b-3)^2}} \\ &= \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + (b+1)^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + (b-3)^2}}\right] x + \left[\frac{b+1}{\sqrt{a^2 + (b+1)2}} + \frac{b-3}{\sqrt{a^2 + (b-3)^2}}\right] y + \\ &\quad + \frac{b+1}{\sqrt{a^2 + (b+1)^2}} - \frac{3(b-3)}{\sqrt{a^2 + (b-3)^2}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Ta sẽ chọn a, b sao cho

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + (b+1)^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + (b-3)^2}} = -2\left[\frac{b+1}{\sqrt{a^2 + (b+1)^2}} + \frac{b-3}{\sqrt{a^2 + (b-3)^2}}\right],$$

hay

$$\frac{a + 2b + 2}{\sqrt{a^2 + (b+1)^2}} + \frac{a + 2b - 6}{\sqrt{a^2 + (b-3)^2}} = 0,$$

bởi vì như thế giả thiết $2x - y = 2$ sẽ được tận dụng tối đa. Như vậy, "điểm cực trị" của bài toán chính là ngiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2a - b = 2 \\ \dfrac{a + 2b + 2}{\sqrt{a^2 + (b+1)^2}} + \dfrac{a + 2b - 6}{\sqrt{a^2 + (b-3)^2}} = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này, ta được $a = \frac{2}{3}$ và $b = -\frac{2}{3}$. Từ đây, thay các giá trị này vào (1), ta có ngay

$$P \geqslant \frac{12\sqrt{5}}{25}x - \frac{6\sqrt{5}}{25}x + \frac{38\sqrt{5}}{25} = \frac{6\sqrt{5}}{25}(2x - y) + \frac{38\sqrt{5}}{25} = 2\sqrt{5},$$

với đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{2}{3}$ và $y = -\frac{2}{3}$. □

Ví dụ 35. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=6$ và $a^2+b^2+c^2=14$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*
$$P=\frac{4a+b}{c}.$$

Lời giải. **(a)** *Tìm* $\max P$. Để tìm giá trị lớn nhất của P, ta cần tìm một số m thích hợp sao cho bất đẳng thức $\frac{4a+b}{c}\leqslant m$ đúng và dấu đẳng thức có thể xảy ra. Chú ý rằng bất đẳng thức trên có thể được viết lại thành $4a+b\leqslant mc$, hay tương đương

$$(4+n)a+(1+n)b+(n-m)c\leqslant 6n,\quad \forall n>0. \tag{1}$$

Từ đây, ta có ý tưởng là đánh giá Cauchy-Schwarz cho vế trái sao cho $a^2+b^2+c^2$ xuất hiện (vì như thế sẽ tận dụng được giả thiết $a^2+b^2+c^2=14$). Cách đánh giá thích hợp ở đây là

$$\begin{aligned}[(4+n)a+(1+n)b+(n-m)c]^2 &\leqslant \left[(4+n)^2+(1+n)^2+(n-m)^2\right](a^2+b^2+c^2)\\ &=14\left[(4+n)^2+(1+n)^2+(n-m)^2\right].\end{aligned} \tag{2}$$

Vì ta cần chứng minh (1) nên tốt nhất ta nên chọn m, n sao cho vế phải của đánh giá trên bằng với bình phương của vế phải của (1), tức là

$$14\left[(4+n)^2+(1+n)^2+(n-m)^2\right]=36n^2. \tag{3}$$

Ngoài ra, ta cũng chú ý rằng đánh giá (2) có dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\frac{a}{4+n}=\frac{b}{1+n}=\frac{c}{n-m}=\frac{a+b+c}{(4+n)+(1+n)+(n-m)}=\frac{6}{5+3n-m},$$

tức là
$$a=\frac{6(4+n)}{5+3n-m},\quad b=\frac{6(1+n)}{5+3n-m},\quad c=\frac{6(n-m)}{5+3n-m}.$$

Do ta cần tìm giá trị lớn nhất của P nên bộ số này thỏa mãn tất cả các giả thiết của đề bài (để đẳng thức có thể xảy ra). Như thế, ta phải chọn m, n sao cho a, b, $c>0$, $a+b+c=6$ (hiển nhiên điều này thỏa mãn) và $a^2+b^2+c^2=14$, tức là

$$n>m>0,\quad 36\left[(4+n)^2+(1+n)^2+(n-m)^2\right]=14(5+3n-m)^2. \tag{4}$$

Giải hệ (3) và (4), ta tìm được $m=\frac{31}{2}$ và $n=\frac{49}{2}$. Từ đây ta có $a=\frac{19}{7}$, $b=\frac{17}{7}$, $c=\frac{6}{7}$. Ngoài ra, với các số m, n như trên, thế vào (1) và (2), ta thu được

$$4a+b\leqslant\frac{31}{2}c,$$

với đẳng thức xảy ra khi $a=\frac{19}{7}$, $b=\frac{17}{7}$ và $c=\frac{6}{7}$. Từ đó suy ra $\max P=\frac{31}{2}$.

(b) *Tìm* $\min P$. Thực hiện tương tự như phần tìm max, ta có thể tìm được đánh giá

$$\frac{4a+b}{c}\geqslant 2, \tag{5}$$

với đẳng thức xảy ra khi $a=1$, $b=2$ và $c=3$.

Bất đẳng thức (5) cũng được chứng minh tương tự như trên, ta viết lại nó dưới dạng (sau khi đã chọn được các tham số thêm bớt thích hợp)

$$-4a-b+2c\leqslant 0,$$

hay tương đương

$$3a + 6b + 9c \leqslant 7(a + b + c) = 42.$$

Tới đây, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có ngay

$$(3a + 6b + 9c)^2 \leqslant (3^2 + 6^2 + 9^2)(a^2 + b^2 + c^2) = 14(3^2 + 6^2 + 9^2) = 42^2.$$

Bài toán được giải quyết xong. □

Ví dụ 36. *Chứng minh rằng với mọi số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ta có*

$$x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + \cdots + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leqslant \frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{4n+2}}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

Chứng minh. Với mỗi $1 \leqslant i \leqslant n$, ta đặt $c_i = \sin i\alpha - \sin(i-1)\alpha$ với $\alpha = \frac{\pi}{2n+1}$ và

$$S_k = c_1 + c_2 + \cdots + c_k = \sin k\alpha.$$

Rõ ràng $c_i > 0$ do $0 \leqslant (i-1)\alpha < i\alpha < \frac{\pi}{2}$. Hơn nữa, ta cũng dễ dàng kiểm tra được

$$\frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{c_1} = \frac{S_2 + S_3 + \cdots + S_n}{c_2} = \cdots = \frac{S_n}{c_n} = \frac{1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$(x_1 + \cdots + x_k)^2 \leqslant (c_1 + \cdots + c_k)\left(\frac{x_1^2}{c_1} + \cdots + \frac{x_k^2}{c_k}\right) = S_k\left(\frac{x_1^2}{c_1} + \cdots + \frac{x_k^2}{c_k}\right).$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(x_1 + \cdots + x_k)^2 &\leqslant \sum_{k=1}^{n} S_k\left(\frac{x_1^2}{c_1} + \cdots + \frac{x_k^2}{c_k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{S_k + \cdots + S_n}{c_k}x_k^2\\ &= \frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{4n+2}}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x_1}{c_1} = \frac{x_2}{c_2} = \cdots = \frac{x_n}{c_n}$. □

Bài tập tự luyện

A Bất đẳng thức AM-GM

Bài tập 28. Chứng minh rằng với ba số dương a, b, c, ta có

$$\frac{a^4}{b+4c} + \frac{b^4}{c+4a} + \frac{c^4}{a+4b} \geqslant \frac{a^3 + b^3 + c^3}{4}.$$

Bài tập 29 (Nhật Bản, 2005). Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$a\sqrt[3]{1 + b - c} + b\sqrt[3]{1 + c - a} + c\sqrt[3]{1 + a - b} \leqslant 1.$$

Bài tập 30 (Iran, 1998). Cho $x_1, x_2, x_2, x_4 > 0$ và $x_1x_2x_3x_4 = 1$. Chứng minh rằng

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 \geqslant \max\left\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right\}.$$

Bài tập 31 (Mông Cổ, 1996). Cho a, b, c, $d > 0$ và $a+b+c+d=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1+\sqrt{a}}{1-a}+\frac{1+\sqrt{b}}{1-b}+\frac{1+\sqrt{c}}{1-c}+\frac{1+\sqrt{d}}{1-d}\geqslant 8.$$

Bài tập 32 (Hàn Quốc, 1998). Cho x, y, $z > 0$ và $x+y+z=xyz$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\leqslant\frac{3}{2}.$$

Bài tập 33 (Nga, 2002). Cho a, b, $c > 0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geqslant ab+bc+ca.$$

Bài tập 34 (Latvia, 2002). Cho bốn số dương a, b, c, d thỏa mãn $\frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+b^4}+\frac{1}{1+c^4}+\frac{1}{1+d^4}=1$. Chứng minh rằng

$$abcd\geqslant 3.$$

Bài tập 35 (Ukraina, 2001). Chứng minh rằng với a, b, c, x, y, $z > 0$, ta có

$$\left[a(y+z)+b(z+x)+c(x+y)\right]^2\geqslant 4(ab+bc+ca)(xy+yz+zx).$$

Bài tập 36. Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^3+16}+\frac{b}{c^3+16}+\frac{c}{a^3+16}\geqslant\frac{1}{6}.$$

Bài tập 37. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$a+b+c\geqslant\frac{1+a}{1+b}+\frac{1+b}{1+c}+\frac{1+c}{1+a}.$$

Bài tập 38. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

(a) $\dfrac{1+a}{1+b^2}+\dfrac{1+b}{1+c^2}+\dfrac{1+c}{1+a^2}\geqslant 3$;

(b) $\dfrac{a^2}{a+2b^3}+\dfrac{b^2}{b+2c^3}+\dfrac{c^2}{c+2a^3}\geqslant 1$;

(c) $\dfrac{a^3}{a^2+b^2}+\dfrac{b^3}{b^2+c^2}+\dfrac{c^3}{c^2+a^2}\geqslant\dfrac{3}{2}$.

Bài tập 39. Cho x, y, $z > 0$ thỏa mãn $xy+yz+zx=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

(a) $P=x^2+y^2+2z^2$;

(b) $Q=x^2+my^2+nz^2$ (m, n là các hằng số dương).

Bài tập 40. Cho các số thực x, y, z, t thỏa $xy+yz+zt+tx=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=5x^2+4y^2+5z^2+t^2.$$

Bài tập 41. Cho a, b, $c > 0$ và $a^2+2b^2+3c^2=3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=3a+2b+c+\frac{8}{a}+\frac{6}{b}+\frac{4}{c}.$$

Bài tập 42. Cho $a, b, c > 0$ và $a \geqslant \max\{b, c\}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{b} + 2\sqrt{1+\frac{b}{c}} + 3\sqrt[3]{1+\frac{c}{a}}.$$

Bài tập 43. Chứng minh rằng nếu a, b là các số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = 5$, thì

$$a^3 + b^6 \geqslant 9.$$

Bài tập 44. Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$$x\left(9\sqrt{1+x^2} + 13\sqrt{1-x^2}\right) \leqslant 16.$$

Bài tập 45. Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 2)$ là các số thực thỏa mãn

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n = 1.$$

Chứng minh rằng

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geqslant \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n+1}}.$$

Bài tập 46 (Ba Lan, 2005). Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$3\sqrt[9]{\frac{9a(a+b)}{2(a+b+c)^2}} + \sqrt[3]{\frac{6bc}{(a+b)(a+b+c)}} \leqslant 4.$$

Bài tập 47. Chứng minh rằng bất đẳng thức sau với $a, b, c > 0$,

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \geqslant 1.$$

Bài tập 48 (Thổ Nhĩ Kỳ, 2007). Cho $a, b, c > 0$ và $a+b+c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{ab+2c^2+2c} + \frac{1}{bc+2a^2+2a} + \frac{1}{ca+2b^2+2b} \geqslant \frac{1}{ab+bc+ca}.$$

Bài tập 49 (Anh, 2007). Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c, ta có

$$(a^2+b^2)^2 \geqslant (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b+c).$$

Bài tập 50 (Moldova, 2009). Cho $x, y, z \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ và (a, b, c) là một hoán vị tùy ý của (x, y, z). Chứng minh rằng

$$\frac{60a^2-1}{4xy+5z} + \frac{60b^2-1}{4yz+5x} + \frac{60c^2-1}{4zx+5y} \geqslant 12.$$

Bài tập 51 (Mỹ, 1980). Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \in [0, 1]$, ta có

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leqslant 1.$$

Bài tập 52 (Moldova, 2007). Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [0,\ 1]$. Đặt $S = a_1^3 + \cdots + a_n^3$, chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{a_1}{2n+1+S-a_1^3} + \frac{a_2}{2n+1+S-a_2^3} + \cdots + \frac{a_n}{2n+1+S-a_n^3} \leqslant \frac{1}{3}.$$

Bài tập 53 (Ba Lan, 2010). Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^4+b^2c^2+c^4}} + \frac{b^3}{\sqrt{c^4+c^2a^2+a^4}} + \frac{c^3}{\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4}} \geqslant \sqrt{3}$$

đúng với mọi số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^4+b^4+c^4 \geqslant a^3+b^3+c^3$.

Bài tập 54 (Rumani, 1999). Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ và $x_1x_2\cdots x_n = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{x_1+n-1} + \frac{1}{x_2+n-1} + \cdots + \frac{1}{x_n+n-1} \leqslant 1.$$

Bài tập 55. Cho các số dương a, b, c, d thỏa mãn $a+b+c+d=4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + \frac{1}{da} \geqslant a^2+b^2+c^2+d^2.$$

Bài tập 56. Cho $a, b, c > 0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng với mọi $k>0$, ta có

$$(b+c)\sqrt[k]{\frac{bc+1}{a^2+1}} + (c+a)\sqrt[k]{\frac{ca+1}{b^2+1}} + (a+b)\sqrt[k]{\frac{ab+1}{c^2+1}} \geqslant 6.$$

Bài tập 57. Cho các số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thỏa mãn $a_1a_2\cdots a_n = 1$. Chứng minh rằng

$$a_1+a_2+\cdots+a_n \geqslant \sqrt{\frac{a_1^2+1}{2}} + \sqrt{\frac{a_2^2+1}{2}} + \cdots + \sqrt{\frac{a_n^2+1}{2}}.$$

Bài tập 58 (IMO, 2006). Cho các số thực a, b, c thoả mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng

$$(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) \geqslant -\frac{9}{16\sqrt{2}}.$$

Bài tập 59. Chứng minh rằng với mọi $x, y, z > 0$, bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{(x+y+z)^3}{xyz} \geqslant 27\left(\frac{x+y}{x+z} + \frac{x+z}{x+y} - 1\right).$$

Bài tập 60. Cho các số không âm a, b, c, d. Chứng minh rằng

$$(a+b+c+d)^3 \geqslant 4\left[a(c+d)^2 + b(d+a)^2 + c(a+b)^2 + d(b+c)^2\right].$$

Bài tập 61. Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$81(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \leqslant 8(a+b+c)^4.$$

Bài tập 62. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(x+1)^2(y+z)} + \frac{1}{(y+1)^2(z+x)} + \frac{1}{(z+1)^2(x+y)} \leqslant \frac{3}{8}.$$

Bài tập 63. Cho $a, b, c \geqslant 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \leqslant \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}.$$

Bài tập 64. Cho ba số thực t, s, k, trong đó $t \geqslant 0$, $s \geqslant 1$ và $k \geqslant 1$. Chứng minh rằng

$$kt^{s+k} - (s+k)t^k + s \geqslant (t-1)^2.$$

Bài tập 65. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng

$$4(a^2 + b^2 + c^2) + 9a^2b^2c^2 \geqslant 21.$$

Bài tập 66. Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương, ta đều có

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + a + b + c \geqslant 2\sqrt{(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)}.$$

B Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Bài tập 67. Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi $a, b, c > 0$,

$$\frac{a^3}{a+2b} + \frac{b^3}{b+2c} + \frac{c^3}{c+2a} \geqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Bài tập 68. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+2bc} + \frac{b}{b+2ca} + \frac{c}{c+2ab} \geqslant 1.$$

Bài tập 69. Cho bốn số dương a, b, c, d. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geqslant 2.$$

Bài tập 70 (Indonesia, 2007). Chứng minh rằng với ba số thực a, b, c tùy ý, ta có

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geqslant (ab + bc + ca - 1)^2.$$

Bài tập 71. Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1) = 16.$$

Chứng minh rằng

$$-3 \leqslant ab + ac + ad + bc + bd + cd - abcd \leqslant 5.$$

Bài tập 72. Chứng minh rằng với ba số dương tùy ý a, b, c, ta đều có

$$\sqrt{a(b+1)} + \sqrt{b(c+1)} + \sqrt{c(a+1)} \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{(a+1)(b+1)(c+1)}.$$

Bài tập 73 (Iran, 1998). Cho $x, y, z > 1$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x+y+z} \geqslant \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

Bài tập 74 (Nga, 1999). Cho $x, y > 0$ và $x^2 + y^3 \geqslant x^3 + y^4$. Chứng minh rằng

$$x^3 + y^3 \leqslant 2.$$

Bài tập 75 (IMO, 2005). Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc \geqslant 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^5 - a^2}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{b^5 - b^2}{b^5 + c^2 + a^2} + \frac{c^5 - c^2}{c^5 + a^2 + b^2} \geqslant 0.$$

Bài tập 76. Hãy giải lại các bài 11, 12, 13, 20 bằng cách sử dụng Cauchy-Schwarz.

Bài tập 77. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Nếu $k \geqslant 1$, thì

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + k} + \frac{1}{b^2 + c^2 + k} + \frac{1}{c^2 + a^2 + k} \leqslant \frac{3}{2 + k}.$$

Bài tập 78. Cho a, b, c là các số thực dương sao cho $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1 + a + b^2} + \frac{1}{1 + b + c^2} + \frac{1}{1 + c + a^2} \leqslant 1.$$

Bài tập 79. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{3a + b}{2a + c} + \frac{3b + c}{2b + a} + \frac{3c + a}{2c + b} \geqslant 4.$$

Bài tập 80. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} + \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \leqslant \frac{5}{2}.$$

Bài tập 81. Cho a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a - b}{a + 2b + c} + \frac{b - c}{b + 2c + d} + \frac{c - d}{c + 2d + a} + \frac{d - a}{d + 2a + b} \geqslant 0.$$

Bài tập 82. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 - a + 1} + \frac{1}{b^2 - b + 1} + \frac{1}{c^2 - c + 1} \leqslant 3.$$

Bài tập 83. Cho a, b, c, d là các số không âm thỏa mãn $a+b+c+d = 4$ và $a^2+b^2+c^2+d^2 = 7$. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \leqslant 16.$$

Bài tập 84. Chứng minh rằng với mọi $a, b, c > 0$, ta có

$$\frac{(b + c)^2}{b^2 + c^2 + a(b + c)} + \frac{(c + a)^2}{c^2 + a^2 + b(c + a)} + \frac{(a + b)^2}{a^2 + b^2 + c(a + b)} \leqslant 3.$$

Bài tập 85. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{4a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{4b^2 + c^2 + a^2} + \frac{1}{4c^2 + a^2 + b^2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Bài tập 86. Chứng minh rằng với mọi a, b, $c > 0$, ta đều có

$$\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab}\leqslant \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Bài tập 87. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)}+\frac{b^2}{(2b+c)(2b+a)}+\frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)}\leqslant \frac{1}{3}.$$

Bài tập 88 (IMO, 2008). Cho các số thực x, y, z khác 1 và thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{y}{y-1}\right)^2+\left(\frac{z}{z-1}\right)^2\geqslant 1.$$

Bài tập 89. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a^3+abc+b^3}+\frac{b^3}{b^3+abc+c^3}+\frac{c^3}{c^3+abc+a^3}\geqslant 1.$$

Bài tập 90. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{abc}\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)}.$$

Bài tập 91. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=6$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{a+b}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{b+c}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c+a}}\geqslant \frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

Bài tập 92 (Việt Nam, 1998). Cho hai số thực thay đổi x, y. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P=\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y+2)^2}.$$

Bài tập 93 (Việt Nam, 1993). Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $\frac{1}{2}\leqslant a^2+b^2+c^2+d^2\leqslant 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(a-2b+c)^2+(b-2c+d)^2+(b-2a)^2+(c-2d)^2.$$

Bài tập 94 (Trung Quốc, 2003). Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $ab+cd=1$ và x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4 là các số thực sao cho

$$x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2=x_3^2+y_3^2=x_4^2+y_4^2=1.$$

Chứng minh rằng

$$(ay_1+by_2+cy_3+dy_4)^2+(ax_4+bx_3+cx_2+dx_1)^2\leqslant 2\left(\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{c^2+d^2}{cd}\right).$$

Bài tập 95. Cho a, b, c là các số dương và x, y, z là các số thực sao cho

$$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx.$$

Chứng minh rằng

$$ax^2+by^2+cz^2\geqslant 3abc.$$

Bài tập 96. Cho các số thực a_1, a_2, $\ldots$, a_n thỏa $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$. Chứng minh rằng

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} a_i^2\leqslant \frac{n}{3}\sum_{i=1}^{n-1}(a_i-a_{i+1})^2.$$

4 Phương pháp dồn biến

4.1 Giới thiệu về phương pháp dồn biến

Như ta đã biết, hầu hết các bất đẳng thức đều có dấu bằng xảy ra khi có một số biến bằng nhau hoặc có một số biến nhận giá trị tại biên. Ngoài ra, một kinh nghiệm phổ thông cho thấy các bất đẳng thức với số biến ít thường dễ xử lý hơn những bất đẳng thức nhiều biến. Dựa vào những đặc điểm này, người ta đã đề ra phương pháp dồn biến để giúp đưa bất đẳng thức về dạng đơn giản hơn. Khi ấy, tất nhiên việc đánh giá cũng sẽ nhẹ nhàng hơn vì ta có khá nhiều công cụ (mạnh) để xử lý các bất đẳng thức ít biến.

Ý tưởng của phương pháp như sau: Giả sử ta cần chứng minh

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geqslant 0, \tag{1}$$

với $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ và $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.

Khi ấy, nếu ta dự đoán được (1) có dấu bằng xảy ra khi có một số biến bằng nhau, chẳng hạn $x_1 = x_2 = \cdots = x_m$ thì ta có thể thử đánh giá

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) \geqslant f(t, t, \dots, t, x_{m+1}, \dots, x_n), \tag{2}$$

trong đó $t \in \mathbb{I}$ là số sao cho $g(t, t, \dots, t, x_{m+1}, \dots, x_n) = 0$.

Hay tổng quát hơn, ta có thể thử chứng minh

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) \geqslant f(u, u, \dots, u, y_{m+1}, \dots, y_n), \tag{3}$$

với $u, y_{m+1}, \dots, y_n \in \mathbb{I}$ là các số thực thỏa mãn $g(u, u, \dots, u, y_{m+1}, \dots, y_n) = 0$ ($u, y_{m+1}, \dots, y_n$ là các số thực thích hợp được lựa chọn tùy theo bài toán).

Nếu như thực hiện được một trong hai điều này, ta sẽ đưa được bài toán về xét một bất đẳng thức mới với số biến ít hơn ($n - m + 1$ biến so với ban đầu là n biến) và tất nhiên công việc chứng minh cũng sẽ thuận lợi hơn rất nhiều.

Trong trường hợp ta dự đoán được (1) xảy ra đẳng thức khi có một biến nhận giá trị tại biên của $\mathbb{I}$, chẳng hạn là x_1, khi đó ta có thể thử chứng minh

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geqslant f(a, t, x_3, \dots, x_n), \tag{4}$$

trong đó a là hằng số và là biên của $\mathbb{I}$, còn $t \in \mathbb{I}$ là số thực sao cho $g(a, t, x_3, \dots, x_n) = 0$.

Rõ ràng nếu (4) được thỏa mãn thì ta có thể đưa bài toán về xét một bất đẳng thức mới chỉ với $n - 1$ biến. Phần việc còn lại cũng sẽ nhẹ nhàng hơn rất nhiều.

Chú ý.

- Phép dồn biến theo (3) khá phức tạp và đòi hỏi nhiều kiến thức khác nhau. Điều này vượt quá phạm vi của bài viết, do đó ta sẽ không xét nó ở đây. Chúng tôi sẽ chỉ trình bày các phép dồn biến theo (2) và (4).

- Các bất đẳng thức (2) và (4) có thể không phải luôn đúng. Khi ấy, ta sẽ cần phải bổ sung giả thiết để chúng trở thành bất đẳng thức đúng (bằng cách sắp thứ tự, sử dụng nguyên lý Dirichlet, ...).

4.2 Các ví dụ minh họa

4.2.1 Đưa về các biến bằng nhau

Ta mở đầu phần này bằng ví dụ sau.

Ví dụ 37. *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+3abc \geqslant 9.$$

Chứng minh. Đây là một bất đẳng thức đối xứng với ba biến a, b, c và ta có thể dự đoán được dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$. Từ đây, ta nghĩ đến việc đánh giá đưa về hai biến bằng nhau (chú ý rằng ta không thể đưa về ba biến bằng nhau ngay từ đầu được, vì nó tương đương với bất đẳng thức ở đề bài!). Chẳng hạn, ta sẽ đánh giá đưa (a, b) về (t, t), khi đó số t phải thỏa mãn $a+b+c=t+t+c=3$, tức

$$t=\frac{a+b}{2}=\frac{3-c}{2}.$$

Ngoài ra, nếu đặt $f(a, b, c)=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+3abc$ thì ta phải có

$$f(a, b, c) \geqslant f(t, t, c),$$

hay tương đương

$$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+3abc \geqslant 2\left(\frac{2}{t}+\frac{1}{c}\right)+3t^2c.$$

Chú ý rằng khi $a=b=t$ thì $2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{4}{t}$, $3abc=3t^2c$, phần còn lại bị triệt tiêu. Do đó, ta sẽ viết lại bất đẳng thức trên thành dạng như sau (vì như thế ta sẽ tách được bình phương!)

$$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2}{t}\right) \geqslant 3c(t^2-ab).$$

Đến đây, ta thấy

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{2}{t}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b}=\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}, \quad t^2-ab=\frac{(a+b)^2}{4}-ab=\frac{(a-b)^2}{4}.$$

Do đó bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{2(a-b)^2}{ab(a+b)} \geqslant \frac{3}{4}c(a-b)^2,$$

hay

$$(a-b)^2\left[8-3abc(a+b)\right] \geqslant 0.$$

Ta sẽ tìm điều kiện cho bất đẳng thức này đúng, tức là

$$3abc(a+b) \leqslant 8.$$

Chú ý rằng, đối với những bất đẳng thức gồm một "chùm" biểu thức phức tạp thì ta nên tiến hành đánh giá "sơ qua" một chút để đưa về dạng đơn giản hơn rồi hãy xét điều kiện cho bất đẳng thức mới đúng. Như thế công việc sẽ đơn giản và nhẹ nhàng hơn. Chẳng hạn, ở đây ta thấy ngay rằng $abc \leqslant 1$, do đó bất đẳng thức trên sẽ đúng nếu ta có

$$3(a+b) \leqslant 8.$$

Từ đây, ta thấy ngay rằng chỉ cần sắp thứ tự các biến sao cho $a+b$ nhỏ nhất là xong. Vì bất đẳng thức đã cho là đối xứng với ba biến a, b, c nên ta hoàn toàn có thể giả sử $c=\max\{a, b, c\}$, khi đó hiển nhiên ta có $c \geqslant 1$ và $a+b=3-c \leqslant 2 < \frac{8}{3}$.

Như vậy, nếu giả thiết $c = \max\{a, b, c\}$ thì ta có thể chứng minh

$$f(a, b, c) \geqslant f(t, t, c) = f\left(\frac{3-c}{2}, \frac{3-c}{2}, c\right),$$

và ta đưa được bài toán về xét một bất đẳng thức một biến theo c là

$$f\left(\frac{3-c}{2}, \frac{3-c}{2}, c\right) \geqslant 3.$$

Bất đẳng thức này có thể chứng minh khá dễ dàng bằng biến đổi tương đương. Thật vậy, bất đẳng thức trên có thể viết lại thành

$$2\left(\frac{4}{3-c} + \frac{1}{c}\right) + \frac{3}{4}(3-c)^2c \geqslant 9,$$

$$2\left(\frac{4}{3-c} + \frac{1}{c} - 3\right) \geqslant 3 - \frac{3}{4}(3-c)^2c,$$

$$\frac{6(c-1)^2}{(3-c)c} \geqslant \frac{3}{4}(4-c)(c-1)^2,$$

$$(c-1)^2\left[8 - c(3-c)(4-c)\right] \geqslant 0.$$

Bất đẳng thức cuối này đúng do $0 < c(4-c) = 4 - (c-2)^2 \leqslant 4$ và $0 < 3 - c \leqslant 2$. □

Sau đây là một ví dụ khác khó hơn.

Ví dụ 38. *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{6-ab} + \frac{1}{6-bc} + \frac{1}{6-ca} \leqslant \frac{3}{5}.$$

Chứng minh. Tương tự như trên, ta cũng tìm cách đưa (a, b) về (t, t) với

$$t = \frac{a+b}{2} = \frac{3-c}{2}.$$

Đặt $f(a, b, c)$ là vế trái của bất đẳng thức đã cho, ta cần có bất đẳng thức

$$f(a, b, c) \leqslant f(t, t, c),$$

hay tương đương

$$\frac{1}{6-ab} + \frac{1}{6-bc} + \frac{1}{6-ca} \leqslant \frac{1}{6-t^2} + \frac{2}{6-tc}.$$

Vì khi $a = b = t$, ta có $\frac{1}{6-ab} = \frac{1}{6-t^2}$, $\frac{1}{6-bc} + \frac{1}{6-ca} = \frac{2}{6-tc}$, nên ta tách bất đẳng thức trên như sau

$$\frac{1}{6-bc} + \frac{1}{6-ca} - \frac{2}{6-tc} \leqslant \frac{1}{6-t^2} - \frac{1}{6-ab}.$$

Đến đây, ta thấy ngay

$$\frac{1}{6-bc} + \frac{1}{6-ca} - \frac{2}{6-tc} = \frac{1}{6-bc} + \frac{1}{6-ca} - \frac{4}{12-ac-bc} = \frac{c^2(a-b)^2}{2(6-bc)(6-ca)(6-tc)},$$

$$\frac{1}{6-t^2} - \frac{1}{6-ab} = \frac{t^2-ab}{(6-t^2)(6-ab)} = \frac{\frac{(a+b)^2}{4} - ab}{(6-t^2)(6-ab)} = \frac{(a-b)^2}{4(6-t^2)(6-ab)}.$$

Do đó, bất đẳng thức trên có thể viết lại thành

$$(a-b)^2\left[\frac{1}{(6-t^2)(6-ab)} - \frac{2}{(6-bc)(6-ca)(6-tc)}\right] \geqslant 0.$$

Vì $(a-b)^2 \geqslant 0$ nên ta chỉ cần tìm điều kiện sao cho

$$(6-bc)(6-ca)(6-tc) \geqslant 2(6-t^2)(6-ab).$$

Quan sát một chút, ta thấy nếu chọn giả thiết sao cho vế trái càng lớn càng tốt thì bất đẳng thức trên có thể sẽ đúng. Từ đó, ta nghĩ ngay đến việc chọn giả thiết $c = \min\{a, b, c\}$ (vì c càng nhỏ, vế trái sẽ càng lớn) và ta sẽ thử xét xem bất đẳng thức này có đúng không. Giống như ví dụ trên, ta cũng tiến hành đánh giá "sơ bộ" trước. Do $c = \min\{a, b, c\}$ nên $6-ca \geqslant 6-ab > 0$ và $6-tc \geqslant 6-t^2 > 0$. Suy ra bất đẳng thức trên sẽ đúng nếu ta có

$$6-bc \geqslant 2.$$

Tuy nhiên, điều này là hiển nhiên vì $6-bc \geqslant 6-b \geqslant 6-3 > 2$.

Như vậy, bằng cách giả thiết $c = \min\{a, b, c\}$, ta có thể chứng minh được

$$f(a, b, c) \leqslant f(t, t, c) = f\left(\frac{3-c}{2}, \frac{3-c}{2}, c\right)$$

để đưa bài toán về xét một bất đẳng thức một biến theo c:

$$f\left(\frac{3-c}{2}, \frac{3-c}{2}, c\right) = \frac{1}{6-\frac{(3-c)^2}{4}} + \frac{2}{6-\frac{c(3-c)}{2}} \leqslant \frac{3}{5}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\frac{4}{15+6c-c^2} + \frac{4}{12-3c+c^2} \leqslant \frac{3}{5},$$
$$\frac{4(27+3c)}{(15+6c-c^2)(12-3c+c^2)} \leqslant \frac{3}{5},$$
$$20(9+c) \leqslant (15+6c-c^2)(12-3c+c^2).$$

Do $(15+6c-c^2)(12-3c+c^2) = 180+27c-15c^2+9c^3-c^4$ nên bất đẳng thức trên có thể được viết lại thành

$$c^4-9c^3+15c^2-7c \leqslant 0,$$

hiển nhiên đúng vì $c^4-9c^3+15c^2-7c = c(c-7)(c-1)^2 \leqslant 0$. □

Tiếp theo, ta xét một ví dụ dồn biến với điều kiện khác.

Ví dụ 39. *Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng*

$$2(a^2+b^2+c^2)+15 \geqslant 7(a+b+c).$$

Chứng minh. Từ dự đoán dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$, ta nghĩ ngay đến việc sử dụng dồn biến đưa hai biến a, b về bằng nhau. Tuy nhiên, khác với hai ví dụ trước, giả thiết ở đây là $abc = 1$ nên số t mà ta chọn cũng sẽ khác (đây chính là chỗ mà nhiều bạn thường hay bị vướng). Ở đây t phải là số dương sao cho $t \cdot t \cdot c = abc = 1$, tức

$$t = \sqrt{ab} = \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Bây giờ, tương tự như các ví dụ trước, ta cũng sẽ tìm điều kiện sao cho bất đẳng thức

$$f(a, b, c) \geqslant f(t, t, c)$$

đúng, trong đó $f(a, b, c) = 2(a^2+b^2+c^2) - 7(a+b+c) + 15$.

Bất đẳng thức này tương đương với

$$2(a^2+b^2-2t^2) \geqslant 7(a+b-2t).$$

Do $a^2+b^2-2t^2=a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$ và $a+b-2t=a+b-2\sqrt{ab}=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$ nên bất đẳng thức trên có thể được viết lại thành

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\left[2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-7\right]\geqslant 0.$$

Như vậy, ta cần tìm điều kiện sao cho

$$2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\geqslant 7.$$

Đánh giá "sơ bộ", ta thấy

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\geqslant 4\sqrt{ab}.$$

Do đó ta chỉ cần chọn giả thiết sao cho $8\sqrt{ab}\geqslant 7$. Điều này hoàn toàn có thể được, vì nếu giả sử $c=\min\{a,\,b,\,c\}$ thì ta sẽ có $\sqrt{ab}\geqslant 1$, tức $8\sqrt{ab}>7$.

Vậy là, bằng cách giả thiết $c=\min\{a,\,b,\,c\}$, ta đã chứng minh được

$$f(a,\,b,\,c)\geqslant f(t,\,t,\,c)=f\left(\frac{1}{\sqrt{c}},\,\frac{1}{\sqrt{c}},\,c\right)=2\left(\frac{2}{c}+c^2\right)-7\left(\frac{2}{\sqrt{c}}+c\right)+15.$$

Cuối cùng, ta đi đến việc xét bất đẳng thức

$$2\left(\frac{2}{c}+c^2\right)-7\left(\frac{2}{\sqrt{c}}+c\right)+15\geqslant 0.$$

Bất đẳng thức này có thể viết lại thành

$$2\left(\frac{2}{c}+c^2-3\right)\geqslant 7\left(\frac{2}{\sqrt{c}}+c-3\right).$$

Để ý rằng $\frac{2}{x}+x^2-3=\frac{(x-1)^2(x+2)}{x}$, do đó bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{2(c-1)^2(c+2)}{c}\geqslant\frac{7\left(\sqrt{c}-1\right)^2\left(\sqrt{c}+2\right)}{\sqrt{c}},$$

hay

$$\left(\sqrt{c}-1\right)^2\left[2(c+2)\left(\sqrt{c}+1\right)^2-7\sqrt{c}\left(\sqrt{c}+2\right)\right]\geqslant 0.$$

Tới đây, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}2(c+2)\left(\sqrt{c}+1\right)^2-7\sqrt{c}\left(\sqrt{c}+2\right)&\geqslant 2(c+2)\cdot 4\sqrt{c}-7\sqrt{c}\left(\sqrt{c}+2\right)\\&=\sqrt{c}\left(8c-7\sqrt{c}+2\right)\\&=\sqrt{c}\left[2\left(2\sqrt{c}-1\right)^2+\sqrt{c}\right]\geqslant 0.\end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong. ☐

Trên đây, ta đã sử dụng thành công phương pháp dồn biến để giải những bài toán bất đẳng thức có điều kiện. Vậy với những bài toán mà các biến không bị ràng buộc nhau bởi bất cứ điều kiện nào thì ta phải làm sao?

Thật ra, phương pháp dồn biến vẫn tỏ ra rất hiệu quả trong các bài toán ấy. Thậm chí ta còn "tự do" hơn trong việc chọn kiểu dồn biến (trùng bình cộng, trung bình nhân, ...) vì không có điều kiện ràng buộc. Tuy nhiên, để thành công, ta không nên chọn kiểu dồn biến một cách "bừa bãi" mà phải suy xét trước nhiều yếu tố, đặc biệt là các tính toán. Ta nên chọn kiểu dồn biến nào mà tính toán ít hơn cả (vì như thế sẽ ít có sai sót trong tính toán hơn).

Ta xét một ví dụ:

Ví dụ 40. *Cho ba số không âm a, b, c. Chứng minh rằng*

$$(a+b+c)^3 + 9abc \geqslant 4(a+b+c)(ab+bc+ca).$$

Chứng minh. Dễ thấy bất đẳng thức có dấu bằng khi $a = b = c$, do đó ta nghĩ đến việc làm giảm số biến bằng cách đưa hai biến về bằng nhau, chẳng hạn ta đưa (a, b) về (t, t). Chú ý rằng nếu ta chọn $t = \sqrt{ab}$ (tương ứng, $t = \sqrt{(a+c)(b+c)} - c$) để đảm bảo tích abc (tương ứng, $ab+bc+ca$) thì việc phân tích bình phương khi dồn biến sẽ khá phức tạp, các biểu thức thu được sau khi tách bình phương sẽ chứa căn thức và không dễ để đánh giá (bạn đọc có thể thử kiểm tra). Trong khi đó, nếu chọn $t = \frac{a+b}{2}$, mọi thứ sẽ đơn giản hơn rất nhiều bởi ta không phải xét đến "chùm" biểu thức khó chịu $(a+b+c)^3$ (trong khi hai kiểu kia thì ngược lại), hơn nữa sau khi tách bình phương, căn thức không tạo ra nên cũng dễ xử lý hơn.

Từ những phân tích như trên, ta nghĩ đến việc tìm điều kiện sao cho

$$f(a, b, c) \geqslant f(t, t, c),$$

trong đó $t = \frac{a+b}{2}$ và $f(a, b, c) = (a+b+c)^3 + 9abc - 4(a+b+c)(ab+bc+ca)$.

Do $a+b+c = 2t+c$ nên bất đẳng thức trên tương đương với

$$(2t+c)^3 + 9abc - 4(2t+c)(ab+2tc) \geqslant (2t+c)^3 + 9t^2c - 4(2t+c)(t^2+2tc),$$

hay

$$4(2t+c)(t^2-ab) \geqslant 9c(t^2-ab).$$

Vì $t^2 - ab = \frac{(a+b)^2}{4} - ab = \frac{(a-b)^2}{4} \geqslant 0$ nên ta chỉ cần chọn giả thiết sao cho

$$4(2t+c) \geqslant 9c,$$

hay tương đương

$$4(a+b) \geqslant 5c.$$

Ta thấy ngay điều này sẽ thỏa mãn khi chọn $c = \min\{a, b, c\}$. Như thế, bằng cách giả sử $c = \min\{a, b, c\}$ (dựa vào tính đối xứng của các biến), ta chứng minh được

$$f(a, b, c) \geqslant f(t, t, c),$$

từ đó bài toán được đưa về chứng minh

$$f(t, t, c) = (2t+c)^3 + 9t^2c - 4(2t+c)(t^2+2tc) \geqslant 0.$$

Do $(2t+c)^3 - 4(2t+c)(t^2+2tc) = c(2t+c)(c-4t) = c(c^2-2tc-8t^2)$ nên ta có

$$(2t+c)^3 + 9t^2c - 4(2t+c)(t^2+2tc) = 9t^2c + c(c^2-2tc-8t^2) = c(t-c)^2 \geqslant 0.$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Ta tiếp tục với một số ví dụ về dồn biến cho các bất đẳng thức bốn biến.

Ví dụ 41. *Cho các số thực dương a, b, c, d thỏa $a+b+c+d=1$. Chứng minh rằng*

$$abc + bcd + cda + dab \leqslant \frac{1}{27} + \frac{176}{27}abcd.$$

Chứng minh. Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = d = \frac{1}{4}$, do đó ta có ý tưởng là đánh giá đưa ba biến về bằng nhau. Mặt khác, vì giả thiết là $a + b + c + d = 1$ nên ta sẽ tìm cách đánh giá đưa (a, b, c) về (t, t, t) với

$$t = \frac{a+b+c}{3} = \frac{1-d}{3}.$$

Để ý rằng bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $f(a, b, c, d) \leqslant \frac{1}{27}$, trong đó

$$f(a, b, c, d) = abc + bcd + cda + dab - \frac{176}{27}abcd = abc\left(1 - \frac{176}{27}d\right) + d(ab + bc + ca).$$

Và ta cần tìm điều kiện sao cho

$$f(a, b, c, d) \leqslant f(t, t, t, d),$$

hay

$$abc\left(1 - \frac{176}{27}d\right) + d(ab + bc + ca) \leqslant t^3\left(1 - \frac{176}{27}d\right) + 3t^2 d.$$

Do khi $a = b = c = t$ thì $abc = t^3$ và $ab + bc + ca = 3t^2$ nên ta tách như sau

$$d(3t^2 - ab - bc - ca) \geqslant (t^3 - abc)\left(\frac{176}{27}d - 1\right) \geqslant 0,$$

hay tương đương

$$3t^2 - ab - bc - ca \geqslant \left(\frac{176}{27} - \frac{1}{d}\right)(t^3 - abc). \qquad (1)$$

Quan sát một chút, ta thấy nên chọn $d = \min\{a, b, c, d\}$ vì khi đó vế phải của bất đẳng thức trên sẽ rất nhỏ và khả năng đúng của bất đẳng thức cũng sẽ cao hơn. Tuy nhiên, khác với các ví dụ trước, ta không thể phân tích nhân tử bình phương cho $3t^2 - ab - bc - ca$ và $t^3 - abc$ (bạn đọc có thể kiểm tra). Như vậy, để xét tính đúng đắn của (1), ta cần phải làm cách khác. Vì (1) khá cồng kềnh nên rất tự nhiên, ta nghĩ đến việc đánh giá để làm gọn bất đẳng thức rồi sau đó đưa về xét tính đúng đắn của bất đẳng thức mới thu được. Ý tưởng của ta như sau:

Để ý rằng $3t^2 - ab - bc - ca \geqslant 0$ và $t^3 - abc \geqslant 0$. Ta sẽ tìm cách đánh giá $3t^2 - ab - bc - ca$ theo $t^3 - abc$ để sau bước đánh giá, ta có thể lượt bớt đi đại lượng $t^3 - abc$ ở hai vế và thu được một bất đẳng thức gọn gàng hơn. Do $3t^2 - ab - bc - ca$ có bậc hai và $t^3 - abc$ có bậc ba, hơn nữa ta cần đảm bảo tính đối xứng của a, b, c (để tiện việc đánh giá), nên đánh giá mà ta mong muốn phải có dạng

$$M(a + b + c)(3t^2 - ab - bc - ca) \geqslant t^3 - abc,$$

hay tương đương

$$9M(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \geqslant (a + b + c)^3 - 27abc.$$

Ta sẽ tìm hằng số M tốt nhất để bất đẳng thức trên đúng (vì đánh giá càng chặt thì tính hiệu quả sẽ càng cao). Do tính đối xứng nên ta dự đoán dấu đẳng thức sẽ đạt được khi có hai biến bằng nhau, chẳng hạn $a = b$. Thay vào, bất đẳng thức trở thành

$$9M(2a + c)(a - c)^2 \geqslant (2a + c)^3 - 27a^2c = (8a + c)(a - c)^2.$$

Như vậy, ta phải có

$$9M \geqslant \frac{8a+c}{2a+c}, \quad \forall a,\, c > 0,\, a \neq c.$$

Mà $\frac{8a+c}{2a+c} = 1 + \frac{6a}{2a+c} < 1 + \frac{6a}{2a} = 4$. Hơn nữa, khi $c \to 0^+$ thì $\frac{8a+c}{2a+c} \to 4$. Vì vậy, ta phải có $M \geqslant \frac{4}{9}$. Từ đây, ta dự đoán $M = \frac{4}{9}$ là hằng số tốt nhất, tức

$$4(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \geqslant (a+b+c)^3 - 27abc.$$

Để ý một chút, ta thấy ngay đây chính là kết quả của ví dụ 40 (dựa vào hằng đẳng thức quen thuộc $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = (a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)$). Như vậy, ta đã thiết lập được một đánh giá khá chặt là

$$\frac{4}{9}(a+b+c)(3t^2-ab-bc-ca) \geqslant t^3 - abc,$$

từ đây ta có

$$3t^2-ab-bc-ca \geqslant \frac{9}{4(a+b+c)}(t^3-abc) = \frac{9}{4(1-d)}(t^3-abc).$$

Như thế, thay vì phải xét trực tiếp (1) (khá khó khăn), ta chỉ cần xét tính đúng đắn của

$$\frac{9}{4(1-d)}(t^3-abc) \geqslant \left(\frac{176}{27} - \frac{1}{d}\right)(t^3-abc),$$

hay

$$(t^3-abc)\left[\frac{9}{4(1-d)} + \frac{1}{d} - \frac{176}{27}\right] \geqslant 0.$$

Tuy nhiên, ta lại thấy ngay bất đẳng thức này đúng do $t^3 - abc \geqslant 0$ và

$$\frac{9}{4(1-d)} + \frac{1}{d} = \frac{3^2}{4-4d} + \frac{4^2}{16d} \geqslant \frac{(3+4)^2}{(4-4d)+16d} = \frac{7^2}{4+12d} \geqslant \frac{7^2}{4+3\cdot 1} = 7 > \frac{176}{27}.$$

Từ đây, kết hợp với các lý luận đã trình bày, ta suy ra khi $d = \min\{a,\, b,\, c\}$ thì

$$f(a,\, b,\, c,\, d) \leqslant f(t,\, t,\, t,\, d) = f\left(\frac{1-d}{3},\, \frac{1-d}{3},\, \frac{1-d}{3},\, d\right).$$

Và như thế, ta chỉ còn phải xét một bất đẳng thức một biến là

$$f\left(\frac{1-d}{3},\, \frac{1-d}{3},\, \frac{1-d}{3},\, d\right) = \frac{1}{27}\left(1 - \frac{176}{27}d\right)(1-d)^3 + \frac{1}{3}d(1-d)^2 \leqslant \frac{1}{27}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\left(1 - \frac{176}{27}d\right)(1-d)^3 + 9d(1-d)^2 \leqslant 1,$$

$$-\frac{176}{27}d(1-d)^3 + 9d(1-d)^2 \leqslant 1 - (1-d)^3 = d\left[1 + (1-d) + (1-d)^2\right],$$

$$-\frac{176}{27}(1-d)^3 + 8(1-d)^2 \leqslant 2 - d.$$

Đặt $u = 1 - d$, $\frac{3}{4} \leqslant u < 1$, thì ta phải chứng minh

$$-\frac{176}{27}u^3 + 8u^2 \leqslant 1 + u,$$

hiển nhiên đúng vì $1 + u - 8u^2 + \frac{176}{27}u^3 = \frac{1}{27}(11u+3)(4u-3)^2 \geqslant 0$. □

Ví dụ 42. *Cho các số dương a, b, c, d thỏa mãn abcd = 1. Chứng minh rằng*

$$3(a^2+b^2+c^2+d^2)+4 \geqslant (a+b+c+d)^2.$$

Chứng minh. Đặt $f(a,b,c,d) = 3(a^2+b^2+c^2+d^2)+4-(a+b+c+d)^2$. Bất đẳng thức cần chứng minh có dạng

$$f(a,b,c,d) \geqslant 0.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $d = \min\{a,b,c\}$. Đặt $t = \sqrt[3]{abc}$, ta sẽ chứng minh

$$f(a,b,c,d) \geqslant f(t,t,t,d), \qquad (1)$$

hay

$$3(a^2+b^2+c^2-3t^2) \geqslant (a+b+c+d)^2-(3t+d)^2 = (a+b+c-3t)(a+b+c+3t+2d).$$

Do $d \leqslant \sqrt[3]{abc} = t$ và $a+b+c \geqslant 3t$ nên ta chỉ cần chứng minh được

$$3(a^2+b^2+c^2-3t^2) \geqslant (a+b+c-3t)(a+b+c+5t) = (a+b+c)^2+2t(a+b+c)-15t^2,$$

hay tương đương

$$3(a^2+b^2+c^2)+6t^2 \geqslant (a+b+c)^2+2t(a+b+c). \qquad (2)$$

Bất đẳng thức này có thể chứng minh bằng dồn biến (xin dành cho bạn đọc). Ở đây xin trình bày một cách chứng minh khác như sau: Ta có

$$a^2+b^2+c^2+3t^2-2t(a+b+c) = (a-t)^2+(b-t)^2+(c-t)^2 \geqslant 0.$$

Mặt khác, theo các bất đẳng thức AM-GM và Schur thì

$$\begin{aligned}
2\sum a^2+3t^2-(a+b+c)^2 &= 2(a^2+b^2+c^2)+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}-(a+b+c)^2\\
&= \frac{9abc}{3\sqrt[3]{abc}}+(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca)\\
&\geqslant \frac{9abc}{a+b+c}+(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca)\\
&= \frac{a^3+b^3+c^3+3abc-ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c+a)}{a+b+c} \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Kết hợp hai đánh giá trên lại, ta suy ra (2) đúng. Vì vậy (1) cũng đúng. Và như thế, ta đưa được bài toán về chứng minh (chú ý rằng $d = \frac{1}{t^3}$)

$$f(t,t,t,d) = f\left(t,t,t,\frac{1}{t^3}\right) \geqslant 0,$$

hay

$$3\left(3t^2+\frac{1}{t^6}\right)+4-\left(3t+\frac{1}{t^3}\right)^2 \geqslant 0.$$

Do $\left(3t+\frac{1}{t^3}\right)^2 = 9t^2+\frac{6}{t^2}+\frac{1}{t^6}$ nên bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{2}{t^6}+4-\frac{6}{t^2} \geqslant 0,$$

hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM. □

Qua hai ví dụ trên, có thể thấy rằng khi sử dụng dồn biến để đưa một số lượng không nhỏ hơn 3 các biến về bằng nhau thì việc phân tích ra bình phương thường rất khó khăn và ta buộc phải sử dụng những đánh giá trung gian khác mới đi đến thành công. Ta cũng gặp khó khăn tương tự khi sử dụng dồn biến đưa hai biến về bằng nhau trong một số bất đẳng thức ba biến, đặc biệt là những bài toán có điều kiện lạ. Ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 43. *Cho a, b, $c > 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca + 6abc = 9$. Chứng minh rằng*

$$a + b + c + 3abc \geqslant 6.$$

Chứng minh. Giống như các bài trước, ta dễ dàng dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$, từ đó ta có ý tưởng sử dụng dồn biến đưa hai biến về bằng nhau. Chẳng hạn ta sẽ đưa $(a,\, b)$ về $(t,\, t)$ với t là số dương thỏa mãn (số t này tồn tại, bạn đọc có thể kiểm tra)

$$t^2 + 2tc + 6t^2c = ab + bc + ca + 6abc = 9. \tag{1}$$

Như thường lệ, ta cần tìm điều kiện sao cho bất đẳng thức

$$f(a,\, b,\, c) \geqslant f(t,\, t,\, c) \tag{2}$$

đúng, trong đó $f(a,\, b,\, c) = a + b + c + abc$.

Giống như những ví dụ trước, ta tách bất đẳng thức trên thành

$$a + b - 2t \geqslant 3c(t^2 - ab). \tag{3}$$

Mọi việc tưởng chừng khá suôn sẻ thuận lợi, nhưng đến bước này thì ta có thể thấy ngay một khó khăn khá lớn. Từ (1), nếu tính t trực tiếp để có thể thế vào (3) và tách bình phương, ta sẽ phải trải nhiều tính toán và thu được các căn thức phức tạp. Điều này không khả thi vì với các căn thức rất khó tách bình phương, mà cho dù có tách được thì ta cũng phải trải qua nhiều quá trình trục căn thức để rồi cuối cùng thu được một biểu thức rất phức tạp, rất khó đánh giá. Lúc này, có một ý tưởng rất thú vị:

Để ý rằng khi $a = b = t$ thì $t^2 = ab$, $2tc = bc + ca$ và $6t^2c = 6abc$. Từ đó ta viết lại (1) thành

$$(t^2 - ab) + (6t^2c - 6abc) = ac + bc - 2tc,$$

hay tương đương

$$(1 + 6c)(t^2 - ab) = c(a + b - 2t). \tag{4}$$

Đến đây thì chắc hẳn các bạn đã phát hiện được điều mà chúng tôi muốn đề cập. Từ (4), ta có thể rút ra $a + b - 2t = \frac{1+6c}{c}(t^2 - ab)$, và do đó ta có thể thế vào (3) để phân tích được nhân tử $t^2 - ab$ và thu được một bất đẳng thức khá gọn là

$$(t^2 - ab)\left(\frac{1 + 6c}{c} - 3c\right) \geqslant 0. \tag{5}$$

Như vậy, ta chỉ cần tìm điều kiện cho bất đẳng thức này đúng nữa là xong.

Ta có một chú ý quan trọng là từ (4), ta có thể suy ra

$$\frac{a + b}{2} \geqslant t \geqslant \sqrt{ab}.$$

Thật vậy, nếu $t > \frac{a+b}{2}$ thì vế phải của (4) là một số âm. Trong khi đó, ta lại có

$$t^2 - ab > \frac{(a+b)^2}{4} - ab = \frac{(a-b)^2}{4} \geqslant 0$$

nên vế trái của (4) là một số dương. Số âm thì không thể bằng số dương, do vậy ta có điều mâu thuẫn. Tương tự, ta cũng không thể có $t < \sqrt{ab}$.

Bây giờ, từ kết quả trên ta suy ra $t^2 - ab \geqslant 0$. Và như thế, để bất đẳng thức (5) đúng, ta chỉ cần tìm điều kiện sao cho

$$\frac{1+6c}{c} - 3c \geqslant 0.$$

Dễ thấy khi c càng nhỏ thì vế trái của bất đẳng thức này càng lớn, nghĩa là khả năng vế trái không âm cũng sẽ càng cao. Từ đây ta nghĩ đến việc chọn $c = \min\{a, b, c\}$. Khi ấy ta có thể thấy ngay $0 < c \leqslant 1$, dẫn đến

$$\frac{1+6c}{c} - 3c = \frac{1}{c} + 6 - 3c > 0.$$

Như vậy, trong trường hợp này (1) đúng và ta đưa được bài toán về xét một bất đẳng thức một biến là (chú ý rằng $c = \frac{9-t^2}{2t(3t+1)} > 0$)

$$f(t, t, c) = f\left(t, t, \frac{9-t^2}{2t(3t+1)}\right) \geqslant 6.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$2t + \frac{9-t^2}{2t(3t+1)} + \frac{3t(9-t^2)}{2(3t+1)} \geqslant 6,$$

$$\frac{9-t^2}{2t(3t+1)} + \frac{3t(9-t^2)}{2(3t+1)} \geqslant 2(3-t),$$

$$\frac{3+t}{t} + 3t(3+t) \geqslant 4(3t+1),$$

$$t^2 + \frac{1}{t} - t - 1 \geqslant 0,$$

hiển nhiên đúng do $t^2 + \frac{1}{t} - t - 1 = \frac{(t+1)(t-1)^2}{t} \geqslant 0$. □

Ví dụ 44. *Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca + 2abc = 1$. Chứng minh rằng*

$$a^2 + b^2 + c^2 + 10abc \geqslant 2.$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử $c = \min\{a, b, c\}$. Ta sẽ chứng minh

$$a^2 + b^2 + c^2 + 10abc \geqslant 2t^2 + c^2 + 10t^2c, \quad (1)$$

với t là số dương sao cho (số t này tồn tại)

$$t^2 + 2tc + 2t^2c = ab + bc + ca + 2abc = 1. \quad (2)$$

Bất đẳng thức (1) tương đương với

$$(a+b)^2 - 2ab + 10abc \geqslant 2t^2 + 10t^2c,$$

hay

$$(a+b)^2 - 4t^2 \geqslant (10c-2)(t^2-ab). \quad (3)$$

Mặt khác, do (2) nên ta có

$$c(a+b-2t) = (2c+1)(t^2-ab),$$

từ đó dễ dàng suy ra $\frac{a+b}{2} \geqslant t \geqslant \sqrt{ab}$ và $a+b-2t = \frac{2c+1}{c}(t^2-ab)$, dẫn đến

$$(a+b)^2 - 4t^2 = (a+b-2t)(a+b+2t) = \frac{2c+1}{c}(t^2-ab)(a+b+2t).$$

Và do đó, (3) có thể được viết lại thành

$$(t^2-ab)\big[(a+b+2t)(2c+1) - 2c(5c-1)\big] \geqslant 0.$$

Bất đẳng thức này đúng do $a+b+2t \geqslant 4\sqrt{ab} \geqslant 4c$ và $2(2c+1)-(5c-1) = 3-c > 0$. Vậy (1) đúng, do vậy ta chỉ cần chứng minh

$$2t^2 + c^2 + 10t^2c \geqslant 2.$$

Vì $t = \frac{1}{1+2c}$ (suy ra từ (2)) nên bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{10c+2}{(2c+1)^2} + c^2 \geqslant 2,$$

$$c^2 \geqslant 2 - \frac{10c+2}{(2c+1)^2} = \frac{2c(4c-1)}{(2c+1)^2},$$

$$c(4c^2+4c+1) \geqslant 2(4c-1),$$

hiển nhiên đúng vì $c(4c^2+4c+1) - 2(4c-1) = (c+2)(2c-1)^2 \geqslant 0$. □

Trên đây, ta vừa xét qua một số kiểu dồn biến để đưa các biến về bằng nhau. Ngoài ra ta còn có nhiều phương pháp dồn biến khác tùy thuộc vào từng bài toán và điều kiện tương ứng (chẳng hạn, quy nạp cũng có thể xem là một phương pháp dồn biến hiệu quả để xử lý các bất đẳng thức dạng tổng quát[7]). Bạn đọc quan tâm có thể tự tìm hiểu thêm.

4.2.2 Dồn biến về biên

Như đã nói ở phần giới thiệu, khi một bất đẳng thức có dấu bằng đạt được tại biên thì ta có thể thử sử dụng dồn biến về biên để đưa về số biến ít hơn. Công việc còn lại chỉ là tìm cách xử lý bất đẳng thức mới với số biến ít hơn ấy. Sau đây là một số ví dụ:

Ví dụ 45. *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$a^2b + b^2c + c^2a \leqslant 4.$$

Chứng minh. Đây là một bất đẳng thức hoán vị với ba biến a, b, c. Kinh nghiệm thông thường cho thấy các bất đẳng thức hoán vị thường xảy ra dấu bằng khi tất cả các biến bằng nhau hoặc khi có một biến nhận giá trị tại biên. Mặt khác, ta dễ dàng nhận thấy bộ số $a=b=c=1$ không phải là điểm đẳng thức của bài toán này, vì vậy rất có khả năng bất đẳng thức đã cho có dấu bằng khi một trong ba số a, b, c bằng 0. Do tính hoán vị vòng quanh

[7]Xem lại ví dụ 4 phần 1.

nên ta có thể giả sử $c = 0$, khi đó $b = 3 - a$. Thay vào kiểm tra trực tiếp, ta có ngay tại $a = 2$ (tương ứng $b = 1$) thì dấu đẳng thức xảy ra. Vậy ta dự đoán được điều kiện đẳng thức của bài toán là $a = 2$, $b = 1$ và $c = 0$.

Từ dự đoán này suy ra phép dồn biến mà ta nên sử dụng ở đây là dồn ra biên (chứ không phải đưa các biến về bằng nhau). Chẳng hạn, ta sẽ dồn c về 0. Chú ý rằng, ta cần đảm bảo giả thiết của đề bài là $a + b + c = 3$, hơn nữa do điều kiện đẳng thức như trên nên rất tự nhiên ta nghĩ đến việc "gán" những cái lớn nhất vào a. Từ những phân tích này, ta nghĩ đến việc đánh giá đưa (a, b, c) về $(a + c, b, 0)$ (ở đây ta ghép c vào a để số hạng đầu càng thêm lớn).

Như vậy, ta cần tìm điều kiện sao cho

$$f(a, b, c) \leqslant f(a + c, b, 0), \tag{1}$$

trong đó $f(a, b, c) = a^2b + b^2c + c^2a$.

Tính toán trực tiếp, ta có

$$\begin{aligned} f(a, b, c) - f(a + c, b, 0) &= a^2b + b^2c + c^2a - (a + c)^2b = a^2b + b^2c + c^2a - b(a^2 + 2ac + c^2) \\ &= b^2c + c^2a - 2abc - bc^2 = c(b^2 + ac - 2ab - bc). \end{aligned}$$

Suy ra, để bất đẳng thức (1) đúng thì ta phải có

$$b^2 + ac - 2ab - bc \leqslant 0.$$

Quan sát một chút, ta thấy $b^2 + ac - 2ab - bc = (b - a)(b - c) - ab \leqslant (b - a)(b - c)$. Do đó nếu $(b - a)(b - c) \leqslant 0$ thì (1) sẽ đúng và bước dồn biến được thực hiện xong. Nhưng điều này hoàn toàn có thể xảy ra, cụ thể nếu ta chọn b là số nằm giữa a và c thì sẽ có ngay $(b - a)(b - c) \leqslant 0$. Phép giả sử này hoàn toàn hợp lệ, vì đây là một bất đẳng thức hoán vị với ba biến a, b, c.

Như vậy, ta đã tìm được điều kiện để (1) đúng. Tất cả công việc phải làm còn lại chỉ là xét bất đẳng thức một biến

$$f(a + c, b, 0) = f(3 - b, b, 0) = b(3 - b)^2 \leqslant 4.$$

Nhưng ta có thể thấy ngay bất đẳng thức này đúng vì $4 - b(3 - b)^2 = (4 - b)(b - 1)^2 \geqslant 0$. Bài toán được chứng minh xong. □

Ví dụ 46. *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 2$. Chứng minh rằng*

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leqslant 1.$$

Chứng minh. Đặt $f(a, b, c) = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$. Ta cần chứng minh

$$f(a, b, c) \leqslant 1.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a = \max\{a, b, c\}$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} f(a, b, c) - f(a, b + c, 0) &= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - a^2(b + c)^2 \\ &= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - a^2(b^2 + 2bc + c^2) \\ &= bc(bc - 2a^2) \leqslant 0, \end{aligned}$$

suy ra

$$f(a, b, c) \leqslant f(a, b + c, 0) = a^2(b + c)^2.$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta lại có

$$a^2(b + c)^2 \leqslant \left[\frac{a + (b + c)}{2}\right]^4 = 1.$$

Từ đây, kết hợp với trên, ta suy ra ngay điều phải chứng minh. □

Khi giải toán, ta sẽ gặp phải những bài toán mà nếu chỉ sử dụng đơn thuần một phép dồn biến thì sẽ không mấy thành công. Tuy nhiên, khi phối hợp nhiều phép dồn biến với nhau, ta lại thu được hiệu quả đáng kinh ngạc. Xét một ví dụ sau

Ví dụ 47. *Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$8\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+9 \geqslant 10(a^2+b^2+c^2).$$

Chứng minh. Ở này, ta dự đoán được dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=\frac{1}{2}$, $c=2$ (và các hoán vị). Do đó, giống như những bài đã làm ở phần trước, ta nghĩ ngay đến việc dồn biến đưa về hai biến bằng nhau. Chẳng hạn, ta sẽ tìm cách đưa (a, b) về $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$ (do giả thiết là $a+b+c=3$). Khi đó, ta cần tìm điều kiện để bất đẳng thức

$$f(a, b, c) \geqslant f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) \tag{1}$$

đúng, trong đó $f(a, b, c) = 8\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+9-10(a^2+b^2+c^2)$.

Tính toán trực tiếp, ta có

$$f(a, b, c) - f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) = 8\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b}\right)-5\left[2(a^2+b^2)-(a+b)^2\right]$$
$$= \frac{8(a-b)^2}{ab(a+b)}-5(a-b)^2 = (a-b)^2\left[\frac{8}{ab(a+b)}-5\right].$$

Vì thế, ta cần tìm điều kiện sao cho

$$ab(a+b) \leqslant \frac{8}{5}.$$

Tuy nhiên, một điều trớ trêu là dù ta có bổ sung giả thiết thế nào bất đẳng thức này cũng không đúng (vì ta có sắp thứ tự các biến thế nào đi chăng nữa thì bộ $(1, 1, 1)$ vẫn luôn nằm trong đó, mà tại điểm này bất đẳng thức trên sai). Như vậy, muốn dồn về hai biến bằng nhau thì ta chỉ còn cách xét trường hợp mà thôi. Cụ thể, nếu $ab(a+b) \leqslant \frac{8}{5}$ thì (1) sẽ đúng và khi đó ta đưa được bài toán về xét một bất đẳng thức một biến là

$$f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) = f\left(\frac{3-c}{2}, \frac{3-c}{2}, c\right) \geqslant 0.$$

Bằng các biến đổi tương đương, ta có thể thấy ngay bất đẳng thức này đúng (xin dành cho bạn đọc). Do vậy, ta chỉ còn phải xét trường hợp

$$ab(a+b) > \frac{8}{5}.$$

Lý luận tương tự, dễ thấy rằng ta chỉ cần xét bài toán trong trường hợp

$$ab(a+b) > \frac{8}{5}, \quad bc(b+c) > \frac{8}{5}, \quad ca(c+a) > \frac{8}{5}. \tag{2}$$

Rõ ràng lúc này việc dồn biến đưa các biến về bằng nhau như trước không thực hiện được nữa. Vậy ta phải làm thế nào đây?

Trong tình huống này, có một ý tưởng rất sáng tạo và táo bạo là phối hợp với dồn biến về biên. Hãy cùng chúng tôi xem xét ý tưởng này: Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geqslant b \geqslant c$. Khi đó, ta sẽ xem c là biên của a, b và thực hiện dồn biến về biên như thông thường, nghĩa là ta sẽ chứng minh

$$f(a,\, b,\, c) \geqslant f(a+b-c,\, c,\, c). \tag{3}$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$8\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b-c}-\frac{1}{c}\right) \geqslant 10\left[a^2+b^2-c^2-(a+b-c)^2\right].$$

Do $a^2+b^2-c^2-(a+b-c)^2 = -2(a-c)(b-c)$ và

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b-c}-\frac{1}{c} = \frac{a+b}{ab}-\frac{a+b}{c(a+b-c)} = -\frac{(a+b)(a-c)(b-c)}{abc(a+b-c)},$$

nên ta có thể viết lại bất đẳng thức trên thành

$$4(a-c)(b-c)\left[5-\frac{2(a+b)}{abc(a+b-c)}\right] \geqslant 0,$$

hay tương đương

$$4(a-c)(b-c)\left[5abc(a+b-c)-2(a+b)\right] \geqslant 0.$$

Chú ý rằng $4(a-c)(b-c) \geqslant 0$. Mặt khác, từ (2) ta lại có

$$6abc = a\cdot bc(b+c)+b\cdot ca(c+a)+c\cdot ab(a+b) > a\cdot\frac{8}{5}+b\cdot\frac{8}{5}+c\cdot\frac{8}{5} = \frac{24}{5},$$

suy ra $5abc > 4$ và do đó

$$5abc(a+b-c)-2(a+b) > 4(a+b-c)-2(a+b) = 2(a+b-2c) \geqslant 0.$$

Vậy (3) đúng, và ta quy được bài toán về hai biến bằng nhau (dù ta đã thực hiện dồn biến về biên!). Trường hợp này đã được xét ở trên nên bài toán được chứng minh xong. □

Cuối cùng, ta kết lại phần này với một chứng minh thú vị bằng phép dồn biến về biên cho bài toán thi chọn học sinh giỏi Quốc gia năm 1996.

Ví dụ 48 (Việt Nam, 1996). *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$. Chứng minh rằng*

$$a+b+c \geqslant ab+bc+ca.$$

Chứng minh. Do $ab+bc+ca = 4-abc$ nên bất đẳng thức cần chứng minh có thể được viết lại dưới dạng $f(a,\, b,\, c) \geqslant 4$, trong đó

$$f(a,\, b,\, c) = a+b+c+abc.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử a nằm giữa b và c. Khi đó ta sẽ chứng minh

$$f(a,\, b,\, c) \geqslant f\left(b+c,\, \frac{4}{b+c},\, 0\right), \tag{1}$$

hay

$$a+b+c+abc \geqslant b+c+\frac{4}{b+c}.$$

Bất đẳng thức này có thể viết lại thành

$$(a+abc)(b+c) \geqslant 4. \tag{2}$$

Tính toán trực tiếp, ta có

$$(a+abc)(b+c)-4 = (ab+ac)+abc(b+c)-(ab+bc+ca+abc) = bc\big[a(b+c)-a-1\big].$$

Chú ý rằng, từ giả thiết dễ dàng suy ra $ab+bc+ca \geqslant 3$. Từ đây kết hợp với bất đẳng thức AM-GM, ta được

$$\begin{aligned} a(b+c)-a-1 &\geqslant a(b+c)-\frac{a^2+1}{2}-1 = a(b+c)-\frac{a^2+3}{2} \\ &\geqslant a(b+c)-\frac{a^2+(ab+bc+ca)}{2} = -\frac{(a-b)(a-c)}{2} \geqslant 0. \end{aligned}$$

Do vậy (2) đúng, suy ra (1) cũng đúng. Và với kết quả này, ta có ngay

$$f(a,b,c) \geqslant f\left(b+c, \frac{4}{b+c}, 0\right) = (b+c)+\frac{4}{b+c} \geqslant 4.$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Bài tập tự luyện

Bài tập 97 (Việt Nam, 2006). Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+3 \geqslant 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Bài tập 98. Cho $a, b, c \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Chứng minh rằng

$$8\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \geqslant 5\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)+9.$$

Bài tập 99. Cho $a, b, c \geqslant \frac{2}{3}$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqslant ab+bc+ca.$$

Bài tập 100. Cho ba số không âm a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3+7abc \geqslant 10.$$

Bài tập 101. Cho ba số không âm a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+3abc \geqslant 6.$$

Bài tập 102 (Việt Nam, 1996). Cho a, b, c là các số thực bất kỳ. Chứng minh rằng

$$(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4 \geqslant \frac{4}{7}(a^4+b^4+c^4).$$

Bài tập 103 (Iran, 2009). Cho a, b, $c > 0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+b^2+2}+\frac{1}{b^2+c^2+2}+\frac{1}{c^2+a^2+2}\leqslant\frac{3}{4}.$$

Bài tập 104 (Việt Nam, 2009). Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm tập hợp tất cả các số thực k sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$\left(k+\frac{a}{b+c}\right)\left(k+\frac{b}{c+a}\right)\left(k+\frac{c}{a+b}\right)\geqslant\left(k+\frac{1}{2}\right)^3.$$

Bài tập 105. Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$a^2b+b^2c+c^2a+abc\leqslant 4.$$

Bài tập 106 (Việt Nam, 2002). Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=9$. Chứng minh

$$2(a+b+c)-abc\leqslant 10.$$

Bài tập 107. Chứng minh rằng nếu x, y, z là các số thực thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=2$, thì

$$x+y+z\leqslant xyz+2.$$

Bài tập 108. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=3$. Chứng minh rằng

$$a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4\leqslant 3.$$

Bài tập 109. Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=2$. Chứng minh rằng

$$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\leqslant 1.$$

Bài tập 110. Chứng minh rằng với mọi a, b, c không âm, ta có

$$a^4(b+c)+b^4(c+a)+c^4(a+b)\leqslant\frac{1}{12}(a+b+c)^5.$$

Bài tập 111. Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=2$. Chứng minh rằng

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)\leqslant 3.$$

Bài tập 112 (Việt Nam, 2008). Cho a, b, c là các số không âm khác nhau từng đôi một. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\geqslant\frac{4}{ab+bc+ca}.$$

Bài tập 113. Cho ba số không âm a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\geqslant\frac{5}{2}.$$

Bài tập 114 (Iran, 1996). Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}+\frac{1}{(a+b)^2}\right]\geqslant\frac{9}{4}.$$

Bài tập 115 (Việt Nam, 2006). Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 6\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right).$$

Bài tập 116. Chứng minh rằng nếu a, b, c, d là các số thực dương, thì

$$3(a^4+b^4+c^4+d^4)+4abcd \geqslant (a+b+c+d)(a^3+b^3+c^3+d^3).$$

Bài tập 117. Cho các số không âm a, b, c, d thỏa mãn $a+b+c+d=4$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+d^2+4(a-1)(b-1)(c-1)(d-1) \geqslant 4.$$

Bài tập 118. Cho các số không âm a, b, c, d thỏa mãn $a+b+c+d=2$. Chứng minh rằng

$$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)(c^2+d^2+a^2)(d^2+a^2+b^2) \leqslant 4.$$

Bài tập 119. Cho các số không âm a, b, c, d thỏa mãn $a+b+c+d=3$. Chứng minh rằng

$$ab(b+c)+bc(c+d)+cd(d+a)+da(a+b) \leqslant 4.$$

Bài tập 120. Hãy giải lại các bài toán 18, 19, 22, 23 bằng cách sử dụng dồn biến.

Bài tập 121 (Việt Nam, 2011). Cho số nguyên $n \geqslant 3$. Xét n số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

(i) $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$;

(ii) $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$;

(iii) $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=n(n-1)$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tổng $S=x_1+x_2$.

Bài tập 122 (Mỹ, 1999). Cho số tự nhiên $n \geqslant 4$ và các số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sao cho

$$x_1+x_2+\cdots+x_n \geqslant n, \quad x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \geqslant n^2.$$

Chứng minh rằng

$$\max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \geqslant 2.$$

Bài tập 123 (Canada, 2000). Cho các số thực $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ thỏa mãn:

(i) $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_{100} \geqslant 0$;

(ii) $x_1+x_2 \leqslant 100$;

(iii) $x_3+x_4+\cdots+x_{100} \leqslant 100$.

Tìm giá trị lớn nhất của tổng $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{100}^2$.

Bài tập 124. Cho các số không âm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1 \leqslant \frac{1}{4}.$$

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Văn Mậu, *Bất đẳng thức - Định lý và áp dụng*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2006.

[2] Đoàn Quỳnh, Doãn Minh Cường, Trần Nam Dũng, Đặng Hùng Thắng, *Tài liệu giáo khoa chuyên Toán*, Đại số 10, Nhà xuất bản Giáo dục, 2009.

[3] Vasile Cirtoaje, *Algebraic Inequalities*, GIL Publishing House, 2006.

[4] Phạm Kim Hùng, *Sáng tạo bất đẳng thức*, Nhà xuất bản Tri Thức, 2006.

[5] Vo Quoc Ba Can, Cosmin Pohoata, *Old and New Inequalities*, volume 2, GIL Publishing House, 2008.

[6] Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, *Bất đẳng thức và những lời giải hay*, Nhà xuất bản Hà Nội, 2009.

[7] Vasile Cirtoaje, Vo Quoc Ba Can, Tran Quoc Anh, *Inequalities with Beautiful Solutions*, GIL Publishing House, 2009.

[8] Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, *Sử dụng phương pháp Cauchy-Schwarz để chứng minh bất đẳng thức*, Nhà xuất bản Đại học Sư phạm Hà Nội, 2010.

[9] Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, *Sử dụng AM-GM để chứng minh bất đẳng thức*, Nhà xuất bản Đại học Sư phạm Hà Nội, 2010.

[10] `http://artofproblemsolving.com`.

[11] `http://math.vn`.

[12] `http://mathoverflow.net`.

THAM SỐ HÓA TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Cao Minh Quang[1]

Chúng ta đã quen với kỹ thuật tham số hóa trong các bài toán về phương trình, hệ phương trình. Trong bài viết này, chúng tôi xin trình bày kỹ thuật giải các bài toán bất đẳng thức bằng cách tham số hóa.

Ý tưởng chính của kỹ thuật là nhận xét các mối quan hệ giữa các biến trong bài toán để có thể thêm biến phụ. Ở đây, ta thực hiện tham số hóa bằng cách sử dụng tính chất: *Với mọi số thực a, b thì luôn tồn tại số thực k sao cho $a = b + k$.* Trong trường hợp bài toán có nhiều biến thì ta có thể tham số hóa thêm một vài biến khác. Mục tiêu chính ở đây là sử dụng "phép tịnh tiến trên trục số" để chuyển các biến đang được xem xét thành các biến nhận giá trị nhỏ hơn, và từ đây ta sẽ dễ dàng đánh giá các biến mới so với các biến ban đầu.

Kỹ thuật này thường áp dụng cho lớp các bài toán bất đẳng thức đồng bậc, đối xứng hoặc hoán vị. Sau đây là một số bài toán minh họa.

Bài toán 1 (Bất đẳng thức AM-GM cho ba số). *Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a, b, c, ta có bất đẳng thức*

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}.$$

Chứng minh. Đây là bài toán cơ bản, nổi tiếng, có nhiều cách chứng minh và ứng dụng. Một cách tương đương, ta chỉ cần chứng minh

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc, \quad \forall a,\, b,\, c \geqslant 0.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a = \min\{a, b, c\}$. Đặt $b = a + x$ và $c = a + y$ thì $x, y \geqslant 0$. Thay vào bất đẳng thức cần chứng minh, ta có

$$a^3 + (a+x)^3 + (a+y)^3 \geqslant 3a(a+x)(a+y).$$

Sau khi khai triển và rút gọn, ta được

$$3ax^2 + 3ay^2 + x^3 + y^3 \geqslant 3axy.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng do ta có $3ax^2 + 3ay^2 - 3axy = 3a(x-y)^2 + 3axy \geqslant 0$ và $x^3 + y^3 \geqslant 0$. Bài toán được chứng minh xong. □

Bài toán 2. *Cho các số thực không âm a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geqslant abc + \frac{3}{4}\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right|.$$

[1]Giáo viên trường THPT Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long.

Nhận xét. Bài toán 2 là một kết quả chặt hơn so với bài toán 1 nên có thể chúng ta sẽ gặp nhiều khó khăn trong việc tìm lời giải. Mặc dù bất đẳng thức đang xét có dạng đồng bậc và đối xứng nhưng khó khăn mà chúng ta gặp phải là làm thế nào phá bỏ được dấu trị tuyệt đối. May mắn thay, vì tính chất đối xứng, nên không mất tính tổng quát, ta có thể "sắp xếp thứ tự" các biến a, b, c, từ đó ta có thể bỏ dấu trị tuyệt đối và biến đổi tiếp để có lời giải.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leqslant b \leqslant c$. Khi đó tồn tại x, $y \geqslant 0$ sao cho

$$b = a + x, \quad c = a + y, \quad y \geqslant x.$$

Thay vào, bất đẳng thức cần chứng minh có thể viết lại thành

$$a^3 + (a+x)^3 + (a+y)^3 - 3a(a+x)(a+y) - \frac{9}{4}xy(y-x) \geqslant 0,$$

tương đương với

$$(3ay^2 - 3axy) + 3ax^2 + x^3 + y^3 - \frac{9}{4}xy^2 + \frac{9}{4}x^2y \geqslant 0,$$

hay là

$$3ay(y-x) + 3ax^2 + (y-x)^3 + \frac{3}{4}xy(y-x) + 2x^3 \geqslant 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng vì $y \geqslant x \geqslant 0$. □

Ta sẽ cùng xem xét một số ví dụ khác.

Bài toán 3. *Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng*

$$(a-b)(b-c)(c-a) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{18}.$$

Nhận xét. Khó khăn chúng ta gặp phải là biểu thức không đối xứng. Nếu dùng phép biến đổi đại số thì ta phải chứng minh một bất đẳng thức bậc 3 không đối xứng. Tuy nhiên, với lưu ý rằng $A \leqslant |A|$, $\forall A \in \mathbb{R}$, ta có thể chuyển biểu thức thành dạng đối xứng như ở bài toán 2.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn

$$\left|(a-b)(b-c)(c-a)\right| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{18}.$$

Vì đây là một bất đẳng thức đối xứng nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a \leqslant b \leqslant c$. Đặt $b = a + x$ và $c = a + y$ với $y \geqslant x \geqslant 0$, bất đẳng thức của ta trở thành

$$xy(y-x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{18}.$$

Do $a + b + c = 1$ nên $3a + x + y = 1$, suy ra $x + y \leqslant 1$. Mà $y \geqslant x \geqslant 0$ nên ta có $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ và $x \leqslant y \leqslant 1 - x$. Từ đây suy ra

$$xy(y-x) \leqslant x(1-x)(1-2x) = 2x^3 - 3x^2 + x. \tag{1}$$

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$ với $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Ta có

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 1.$$

Dễ thấy $f'(x) = 0$ khi $x = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$, $f'(x) > 0$ khi $x \in \left[0, \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$ và $f'(x) < 0$ khi $x \in \left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}\right]$. Kết quả này cho thấy $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ là điểm cực đại, và như vậy ta có

$$f(x) \leqslant f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{18}, \quad \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Kết hợp với (1), ta suy ra ngay kết quả cần chứng minh. Với giả thiết $a \leqslant b \leqslant c$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ $x = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$, $y = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$, tức $a = 0$, $b = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$, $c = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$. □

Chú ý. Với chứng minh trên, ta không chỉ giải được bài toán mà còn thu được một bất đẳng thức "kép" thú vị là

$$-\frac{\sqrt{3}}{18} \leqslant (a-b)(b-c)(c-a) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{18}.$$

Các bài toán tiếp theo sẽ minh họa cho tính ưu việt của kỹ thuật này.

Bài toán 4. *Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$(a+b+c)\min\{a, b, c\} \leqslant 2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2.$$

Chứng minh. Do tính đối xứng nên ta có thể giả sử $a = \min\{a, b, c\}$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(a+b+c)a \leqslant 2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2,$$

tương đương

$$2a^2 + b^2 + c^2 \leqslant ab + ac + 2bc.$$

Đặt $b = a + x$ và $c = a + y$ với $x, y \geqslant 0$. Thay vào trên, ta có

$$2a^2 + (a+x)^2 + (a+y)^2 \leqslant a(a+x) + a(a+y) + 2(a+x)(a+y),$$

hay tương đương

$$x^2 + y^2 \leqslant x(a+y) + y(a+x).$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng, vì ta có $a + x > y$ (tương đương với $a + b > c$) và $a + y > x$ (tương đương với $a + c > b$). Bài toán được giải quyết xong. □

Bài toán 5 (Crux). *Cho $a, b, c, d > 0$ và $d = \min\{a, b, c, d\}$. Chứng minh rằng*

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd \geqslant 4d\left[(a-d)^3 + (b-d)^3 + (c-d)^3 - 3(a-d)(b-d)(c-d)\right].$$

Chứng minh. Do $d = \min\{a, b, c, d\}$ nên ta có thể đặt $a = x + d$, $b = y + d$ và $c = z + d$ với $x, y, z \geqslant 0$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(x+d)^4 + (y+d)^4 + (z+d)^4 + d^4 - 4d(x+d)(y+d)(z+d) \geqslant 4d(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz).$$

Sử dụng các phép biến đổi đại số, ta có

$$\begin{aligned} A &= (x+d)^4 + (y+d)^4 + (z+d)^4 + d^4 \\ &= x^4 + y^4 + z^4 + 4d^4 + 4d(x^3 + y^3 + z^3) + 6d^2(x^2 + y^2 + z^2) + 4d^3(x + y + z) \end{aligned}$$

và

$$4d(x+d)(y+d)(z+d) = 4d^4 + 4d^3(x+y+z) + 4d^2(xy + yz + zx) + 4xyzd.$$

Do đó bất đẳng thức trên có thể viết lại thành

$$x^4 + y^4 + z^4 + 6d^2(x^2 + y^2 + z^2) - 4d^2(xy + yz + zx) + 8xyzd \geqslant 0,$$

tương đương

$$x^4 + y^4 + z^4 + 4d^2\left[(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + yz + zx)\right] + 2d^2(x^2 + y^2 + z^2) + 8xyzd \geqslant 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng dó $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx$ và $x, y, z, d \geqslant 0$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 0$, hay $a = b = c = d$. □

Bài toán 6. *Cho các số thực a, b, c thỏa mãn* $\max\{a, b, c\} - \min\{a, b, c\} \leqslant 1$. *Chứng minh*

$$1 + a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geqslant 3a^2b + 3b^2c + 3c^2a.$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử $a = \min\{a, b, c\}$. Đặt $b = a + x$ và $c = a + y$ với $x, y \geqslant 0$. Ta có

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 3a(x^2 - xy + y^2) + x^3 + y^3$$

và

$$a^2b + b^2c + c^2a - 3abc = a(x^2 - xy + y^2) + x^2y.$$

Do đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương với

$$1 + x^3 + y^3 \geqslant 3x^2y.$$

Từ giả thiết, ta suy ra $0 \leqslant x, y \leqslant 1$. Và như vậy, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta được

$$1 + x^3 + y^3 \geqslant 3xy \geqslant 3x^2y.$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Bài toán 7. *Cho a, b, c là các số thực đôi một khác nhau. Chứng minh rằng*

$$(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)\left[\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}\right] \geqslant \frac{27}{4}.$$

Chứng minh. Sử dụng tính đối xứng, ta giả sử $a = \min\{a, b, c\}$ và đặt $b = a + x$, $c = a + y$. Vì a, b, c đôi một phân biệt nên $x, y > 0$ và $x \neq y$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(x^2 - xy + y^2)\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{(x-y)^2}\right] \geqslant \frac{27}{4}.$$

Để ý rằng

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{(x-y)^2} &= \frac{(x^2+y^2)(x-y)^2 + x^2y^2}{x^2y^2(x-y)^2} = \frac{(x^2+y^2)(x^2+y^2-2xy) + x^2y^2}{x^2y^2(x-y)^2}\\ &= \frac{(x^2+y^2)^2 - 2xy(x^2+y^2) + x^2y^2}{x^2y^2(x-y)^2} = \frac{(x^2+y^2-xy)^2}{x^2y^2(x-y)^2}.\end{aligned}$$

Do vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$(x^2 - xy + y^2) \cdot \frac{(x^2 - xy + y^2)^2}{x^2y^2(x-y)^2} \geqslant \frac{27}{4},$$

hay

$$\frac{x^2-xy+y^2}{xy}\cdot\left(\frac{x^2-xy+y^2}{xy}\right)^2\cdot\frac{1}{\frac{x^2-xy+y^2}{xy}-1}\geqslant\frac{27}{4}.$$

Đặt $t=\frac{x^2-xy+y^2}{xy}>1$ (do $x,\ y>0,\ x\neq y$). Ta cần chứng minh

$$\frac{4t^3}{t-1}\geqslant 27.$$

Do $4t^3-27(t-1)=(2t-3)^2(t+3)\geqslant 0$ nên bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. □

Bài toán 8. *Chứng minh rằng với mọi $a,\ b,\ c>0$, ta có*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}+\frac{7}{16}\cdot\frac{\max\left\{(a-b)^2,\ (b-c)^2,\ (c-a)^2\right\}}{ab+bc+ca}.$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử $a\geqslant b\geqslant c$. Bất đẳng thức đã cho trở thành

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}+\frac{7}{16}\cdot\frac{(a-c)^2}{ab+bc+ca}.$$

Nhân cả hai vế cho $ab+bc+ca$, ta có

$$\frac{a\big[a(b+c)+bc\big]}{b+c}+\frac{b\big[b(c+a)+ca\big]}{c+a}+\frac{c\big[c(a+b)+ab\big]}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}(ab+bc+ca)+\frac{7}{16}(a-c)^2,$$

hay tương đương

$$a^2+b^2+c^2+abc\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geqslant\frac{3}{2}(ab+bc+ca)+\frac{7}{16}(a-c)^2.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geqslant\frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Từ đó suy ra ta chỉ cần chứng minh

$$a^2+b^2+c^2+\frac{9abc}{2(a+b+c)}\geqslant\frac{3}{2}(ab+bc+ca)+\frac{7}{16}(a-c)^2.$$

Đặt $a=c+x$ và $b=c+y$ với $x\geqslant y\geqslant 0$. Bất đẳng thức trên trở thành

$$(11x^2-32xy+32y^2)c+(x+y)(3x-4y)^2\geqslant 0.$$

Đây là một kết quả hiển nhiên, vì vậy ta có điều phải chứng minh. □

Cuối cùng, xin đưa ra một số bài tập để bạn đọc tự tìm hiểu thêm.

Bài tập 1 (Bất đẳng thức Shur). Cho $a,\ b,\ c,\ r$ là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-c)(b-a)+c^r(c-a)(c-b)\geqslant 0.$$

Bài tập 2. Cho các số thực phân biệt a, b, c. Chứng minh rằng

$$(a^2+b^2+c^2)\left[\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right] \geqslant \frac{9}{2}.$$

Bài tập 3. Cho các số thực phân biệt a, b, c thỏa mãn các điều kiện $a+b+c=1$ và $ab+bc+ca>0$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\frac{2}{|a-b|}+\frac{2}{|b-c|}+\frac{2}{|c-a|}+\frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}.$$

Bài tập 4 (Việt Nam, 2008)**.** Cho các số không âm phân biệt x, y, z. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2} \geqslant \frac{4}{xy+yz+zx}.$$

Bài tập 5. Cho $k>0$ là một hằng số cho trước. Tìm hằng số λ lớn nhất sao cho với mọi $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant 0$ thỏa điều kiện $a+b+c+d=1$ thì bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{a-b}{k+c+d}+\frac{b-c}{k+d+a}+\frac{c-d}{k+a+b}+\frac{d-a}{k+b+c} \geqslant \lambda(a-b)(b-c)(c-d).$$

Bài tập 6. Chứng minh rằng với mọi a, b, $c>0$, ta đều có

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geqslant 3(a^3b+b^3c+c^3a).$$

Tài liệu tham khảo

[1] Dusan Djukic, Vladimir Jankovic, Ivan Matic, Nikola Petrovic, *The IMO Compendium – A Collection of Problems Suggested for the International Matheatical Olympiads: 1959-2004*, Springer, 2006.

[2] Hojoo Lee, *Topics in Inequalities – Theorems and Techniques*, Electronic Publication, 2007. [ONLINE: `http://wenku.baidu.com/view/55d013ea551810a6f52486db.html`]

[3] Phạm Kim Hùng, *Sáng tạo bất đẳng thức*, Nhà xuất bản Tri Thức, 2006.

[4] Titu Andreescu, Vasile Cirtoaje, Gabriel Dospinescu, Mircea Lascu, *Old and New Inequalities*, GIL Publishing House, 2006.

[5] *Tạp chí Toán Tuổi thơ*, từ năm 2006 đến năm 2010.

[6] *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*, từ năm 2005 đến năm 2010.

[7] *Tạp chí Crux* (Canada), từ năm 2007 đến năm 2010.

[8] `http://www.artofproblemsolving.com`.

ĐỔI BIẾN ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Nguyễn Việt Hùng[1]

Có rất nhiều phương pháp khác nhau để chứng minh bất đẳng thức (BĐT). Bài viết này trình bày về một phương pháp tuy không mới nhưng khá hiệu quả để giải quyết các bài toán BĐT, đó là phương pháp đổi biến. Trong rất nhiều phương pháp chứng minh BĐT thì đổi biến là một trong những kỹ thuật hay, thể hiện được tính sáng tạo của người học toán.

Đổi biến cũng có rất nhiều cách khác nhau, tùy thuộc vào từng bài toán cụ thể mà lựa chọn cách đổi biến sao cho thích hợp. Việc đổi biến một cách khéo léo sẽ giúp ta chuyển BĐT cần chứng minh về những BĐT quen thuộc và dễ chứng minh hơn.

1 Phương pháp lượng giác hóa

Phương pháp lượng giác hóa (hay đổi biến lượng giác) nhiều khi tỏ ra rất hiệu quả đối với một số BĐT có điều kiện. Bằng cách đổi biến thích hợp ta có thể chuyển một BĐT đại số có điều kiện về một BĐT lượng giác. Việc làm này rất có ý nghĩa vì trong lượng giác ta đã có sẵn hàng loạt các công thức và BĐT cơ bản. Nhưng trước hết ta cần làm rõ một số kết quả sau đây

Bổ đề 1. *Nếu x, y, z là các số dương thỏa mãn điều kiện $x+y+x = xyz$ thì tồn tại một tam giác nhọn ABC sao cho $x = \tan A$, $y = \tan B$ và $z = \tan C$.*

Chứng minh. Ta có tập giá trị của hàm số $f(t) = \tan t$ trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ là $\mathbb{R}^+$. Do đó, với mọi số dương x, y, z đều tồn tại các góc A, B, $C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ để $x = \tan A$, $y = \tan B$ và $z = \tan C$. Thay vào, điều kiện $x + y + x = xyz$ trở thành

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C,$$

hay

$$\tan A + \tan B = (\tan A \tan B - 1)\tan C.$$

Do $\tan A + \tan B > 0$ nên ta có $\tan A \tan B - 1 \neq 0$ và

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C.$$

Đẳng thức này có thể viết lại thành

$$\tan(A+B) = \tan(\pi - C).$$

Từ đây suy ra $A + B = -C + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ hay $A + B + C = k\pi$. Vì $0 < A + B + C < \frac{3\pi}{2}$ nên $k = 1$. Vậy ta có $A + B + C = \pi$, hay A, B, C là ba góc của một tam giác nhọn. □

Nhận xét. Hoàn toàn tương tự, ta có thể chứng minh được: *Nếu x, y, z là các số dương thỏa mãn $x + y + z = xyz$ thì tồn tại tam giác ABC sao cho $x = \cot \frac{A}{2}$, $y = \cot \frac{B}{2}$ và $z = \cot \frac{C}{2}$.*

[1]Học viên Cao học khóa 2010-2012, Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội.

Bổ đề 2. *Nếu x, y, z là các số dương thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = 1$ thì tồn tại một tam giác ABC sao cho $x = \tan\frac{A}{2}$, $y = \tan\frac{B}{2}$, $z = \tan\frac{C}{2}$.*

Chứng minh. Chú ý rằng giả thiết $xy+yz+zx = 1$ có thể viết lại thành $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z}$. Do đó, theo bổ đề 1, ta thấy rằng tồn tại tam giác nhọn ABC sao cho

$$\frac{1}{x} = \cot\frac{A}{2},\quad \frac{1}{y} = \cot\frac{B}{2},\quad \frac{1}{z} = \cot\frac{C}{2}.$$

Từ đây, sử dụng công thức $\cot x = \frac{1}{\tan x}$, ta có ngay $x = \tan\frac{A}{2}$, $y = \tan\frac{B}{2}$ và $z = \tan\frac{C}{2}$. Bổ đề được chứng minh. □

Nhận xét. Tương tự, ta cũng có: *Nếu x, y, z là các số dương thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$ thì tồn tại tam giác nhọn ABC sao cho $x = \cot A$, $y = \cot B$ và $z = \cot C$.*

Bổ đề 3. *Nếu x, y, z là các số dương thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ thì tồn tại một tam giác nhọn ABC sao cho $x = \cos A$, $y = \cos B$ và $z = \cos C$.*

Chứng minh. Từ giả thiết suy ra $0 < x, y, z < 1$, do đó ta có thể đặt $x = \cos A$, $y = \cos B$ và $z = \cos C$ với $0 < A, B, C < \frac{\pi}{2}$. Điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ có thể viết lại là

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1,$$
$$(\cos A + \cos B\cos C)^2 + \cos^2 B + \cos^2 C - \cos^2 B\cos^2 C = 1,$$
$$(\cos A + \cos B\cos C)^2 + (1 - \cos^2 C)\cos^2 B = (1 - \cos^2 C),$$
$$(\cos A + \cos B\cos C)^2 = (1 - \cos^2 B)(1 - \cos^2 C),$$
$$(\cos A + \cos B\cos C)^2 = \sin^2 B\sin^2 C,$$
$$\cos A + \cos B\cos C = \sin B\sin C,$$
$$\cos A + \cos(B + C) = 0,$$
$$\cos\frac{A+B+C}{2}\cos\frac{A-B-C}{2} = 0.$$

Mặt khác, do $A, B, C \in (0, \frac{\pi}{2})$ nên $\frac{A+B+C}{2} \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ và $\frac{A-B-C}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$. Từ đây, kết hợp với trên ta suy ra $A + B + C = \pi$, tức A, B, C là ba góc của một tam giác nhọn. □

Nhận xét. Chứng minh tương tự, ta cũng có: *Nếu x, y, z là các số dương thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ thì tồn tại một tam giác ABC sao cho $x = \sin\frac{A}{2}$, $y = \sin\frac{B}{2}$ và $z = \sin\frac{C}{2}$.* Vì vậy cần áp dụng linh hoạt hai cách biến đổi này đối với từng bài toán cụ thể.

Bây giờ ta đi vào phân tích một vài ví dụ cụ thể để thấy được phần nào tính hiệu quả của phương pháp này.

Ví dụ 1 (Hàn Quốc, 1998). *Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z = xyz$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Chứng minh. Từ điều kiện giả thiết suy ra tồn tại tam giác nhọn ABC sao cho $x = \tan A$, $y = \tan B$ và $z = \tan C$ (theo bổ đề 1). BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}} + \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 B}} + \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 C}} \leqslant \frac{3}{2},$$

hay là

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}.$$

Đây là một BĐT cơ bản trong tam giác, việc chứng minh nó rất dễ dàng. □

Ví dụ 2. *Cho x, y, $z > 0$ thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{2x}{1+x^2} + \frac{2y}{1+y^2} + \frac{2z}{1+z^2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Chứng minh. Sử dụng bổ đề 2, ta có thể đặt $x = \tan\frac{A}{2}$, $y = \tan\frac{B}{2}$, $z = \tan\frac{C}{2}$ với A, B, C là ba góc của một tam giác. BĐT cần chứng minh có thể viết lại thành

$$\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}} + \frac{2\tan\frac{B}{2}}{1+\tan^2\frac{B}{2}} + \frac{2\tan\frac{C}{2}}{1+\tan^2\frac{C}{2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\frac{A}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\frac{B}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\frac{C}{2}}},$$

hay tương đương

$$\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}.$$

Do $\cos\frac{C}{2} > 0$ và $\cos\frac{A-B}{2} \leqslant 1$ nên

$$\sin A + \sin B = 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} \leqslant 2\cos\frac{C}{2}.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\sin B + \sin C \leqslant 2\cos\frac{A}{2}, \quad \sin C + \sin A \leqslant 2\cos\frac{B}{2}.$$

Cộng ba bất đẳng thức này lại theo vế, ta có ngay kết quả như trên. □

Ví dụ 3. *Cho x, y, $z > 0$ thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leqslant \frac{9}{4}.$$

Chứng minh. Đặt $x = \tan\frac{A}{2}, y = \tan\frac{B}{2}$ và $z = \tan\frac{C}{2}$ với $0 < A$, B, $C < \pi$ và $A+B+C = \pi$. BĐT cần chứng minh có thể viết lại như sau

$$\frac{2\tan\frac{A}{2}}{\sqrt{1+\tan^2\frac{A}{2}}} + \frac{\tan\frac{B}{2}}{\sqrt{1+\tan^2\frac{B}{2}}} + \frac{\tan\frac{C}{2}}{\sqrt{1+\tan^2\frac{C}{2}}} \leqslant \frac{9}{4},$$

$$2\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{9}{4}.$$

Đặt $t = \sin\frac{B+C}{4}$, ta có

$$\begin{aligned}2\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} &= 2\cos\frac{B+C}{2} + 2\sin\frac{B+C}{4}\cos\frac{B-C}{4}\\ &\leqslant 2\left(1 - 2\sin^2\frac{B+C}{4}\right) + 2\sin\frac{B+C}{4}\\ &= 2 + 2t - 4t^2 = \frac{9}{4} - \left(2t - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{9}{4}.\end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Ví dụ 4. *Cho x, y, $z > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}} \geqslant \sqrt{3}.$$

Chứng minh. Theo bổ đề 3, tồn tại tam giác nhọn ABC sao cho $x = \cos A$, $y = \cos B$ và $z = \cos C$. BĐT cần chứng minh trở thành

$$\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} + \sqrt{\frac{1-\cos B}{1+\cos B}} + \sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}} \geqslant \sqrt{3},$$

$$\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \geqslant \sqrt{3},$$

$$\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)^2 \geqslant 3,$$

$$\tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2} \geqslant 1.$$

BĐT cuối cùng có thể chứng minh dễ dàng. □

Ví dụ 5 (Ấn Độ, 1998)**.** *Cho a, b, $c > 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca + abc = 4$. Chứng minh rằng*

$$a + b + c \geqslant ab + bc + ca.$$

Chứng minh. Điều kiện ở giả thiết có thể viết lại như sau

$$\frac{ab}{4} + \frac{bc}{4} + \frac{ca}{4} + 2\cdot\frac{\sqrt{ab}}{2}\cdot\frac{\sqrt{bc}}{2}\cdot\frac{\sqrt{ca}}{2} = 1.$$

Do đó tồn tại tam giác nhọn ABC sao cho

$$\sqrt{ab} = 2\cos C, \quad \sqrt{bc} = 2\cos A, \quad \sqrt{ca} = 2\cos B.$$

Từ đây, ta có

$$a = \frac{2\cos B\cos C}{\cos A}, \quad b = \frac{2\cos C\cos A}{\cos B}, \quad c = \frac{2\cos A\cos B}{\cos C}.$$

Và như thế, BĐT cần chứng minh có thể được viết lại thành

$$\frac{\cos B\cos C}{\cos A} + \frac{\cos C\cos A}{\cos B} + \frac{\cos A\cos B}{\cos C} \geqslant 2(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C).$$

Bằng phương pháp vectơ ta dễ dàng chứng minh được rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 2yz\cos A + 2zx\cos B + 2xy\cos C, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Sử dụng BĐT này với $x = \sqrt{\frac{\cos B\cos C}{\cos A}}$, $y = \sqrt{\frac{\cos C\cos A}{\cos B}}$ và $z = \sqrt{\frac{\cos A\cos B}{\cos C}}$, ta có ngay kết quả cần chứng minh. □

Nhận xét. Đây là một bài tương đối khó khi sử dụng phương pháp lượng giác hóa. Ta sẽ gặp lại bài toán này trong mục "phương pháp đổi biến đại số".

Ví dụ 6. *Cho x, y, $z > 0$ thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant 3(x + y + z).$$

Chứng minh. Đặt $x = \tan\frac{A}{2}$, $y = \tan\frac{B}{2}$, $z = \tan\frac{C}{2}$ với A, B, C là ba góc của một tam giác. Khi đó, ta phải chứng minh

$$\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} \geqslant 3\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right),$$

hay

$$\left(\cot\frac{A}{2} - \tan\frac{A}{2}\right) + \left(\cot\frac{B}{2} - \tan\frac{B}{2}\right) + \left(\cot\frac{C}{2} - \tan\frac{C}{2}\right) \geqslant 2\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right).$$

Do $\cot x - \tan x = \frac{\cot^2 x - 1}{\cot x} = 2\cot 2x$ nên bất đẳng thức trên có thể viết lại thành

$$\cot A + \cot B + \cot C \geqslant \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}.$$

Ta có

$$\cot A + \cot B = \frac{\sin C}{\sin A \sin B} = \frac{2\sin C}{\cos(A - B) - \cos(A + B)} \geqslant \frac{2\sin C}{1 + \cos C} = 2\tan\frac{C}{2}.$$

Đánh giá tương tự, ta cũng có

$$\cot B + \cot C \geqslant 2\tan\frac{A}{2}, \quad \cot C + \cot A \geqslant 2\tan\frac{B}{2}.$$

Cộng vế theo vế ba BĐT này, ta có ngay kết quả cần chứng minh. □

Nhận xét. Nếu không đổi biến thì ta còn có thể làm theo cách khác như sau: Do

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{1}{xyz},$$

nên BĐT cần chứng minh tương đương với

$$1 \geqslant 3xyz(x + y + z) = 3(xy \cdot yz + yz \cdot zx + zx \cdot xy).$$

Đến đây, ta chỉ cần áp dụng bất đẳng thức cơ bản $3(ab + bc + ca) \leqslant (a + b + c)^2$ với $a = xy$, $b = yz$, $c = zx$.

Ví dụ 7. *Cho a, b, $c > 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1} \leqslant 2(a + b + c).$$

Chứng minh. Đặt $a = \tan\frac{A}{2}$, $b = \tan\frac{B}{2}$, $c = \tan\frac{C}{2}$ với $0 < A, B, C < \pi$ và $A + B + C = \pi$. BĐT cần chứng minh được viết lại như sau

$$\sqrt{1 + \tan^2\frac{A}{2}} + \sqrt{1 + \tan^2\frac{B}{2}} + \sqrt{1 + \tan^2\frac{C}{2}} \leqslant 2\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right),$$

$$\frac{1}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}} \leqslant \left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}\right) + \left(\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right) + \left(\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{A}{2}\right),$$

$$\frac{1}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}} \leqslant \frac{\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} + \frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}},$$

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2} \leqslant \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}.$$

Đây là một kết quả hiển nhiên. □

Nhận xét. Lời giải sau đây không sử dụng phép lượng giác hóa mà lại đơn giản hơn: Ta có

$$\sqrt{a^2+1}=\sqrt{a^2+ab+bc+ca}=\sqrt{(a+b)(a+c)}\leqslant\frac{a+b+a+c}{2},$$
$$\sqrt{b^2+1}=\sqrt{b^2+ab+bc+ca}=\sqrt{(b+a)(b+c)}\leqslant\frac{b+a+b+c}{2},$$
$$\sqrt{c^2+1}=\sqrt{c^2+ab+bc+ca}=\sqrt{(c+a)(c+b)}\leqslant\frac{c+a+c+b}{2}.$$

Cộng các BĐT này lại ta có ngay điều phải chứng minh.

Ví dụ 8. *Cho* x, y, $z>0$ *thỏa mãn* $x+y+z=1$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{x}{x+yz}+\frac{y}{y+zx}+\frac{z}{z+xy}\leqslant\frac{9}{4}.$$

Chứng minh. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{1+\frac{yz}{x}}+\frac{1}{1+\frac{zx}{y}}+\frac{1}{1+\frac{xy}{z}}\leqslant\frac{9}{4},$$
$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\leqslant\frac{9}{4},$$

trong đó $a=\frac{yz}{x}$, $b=\frac{zx}{y}$ và $c=\frac{xy}{z}$.

Để ý rằng $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=x+y+z=1$. Do đó tồn tại một tam giác ABC sao cho

$$\sqrt{a}=\tan\frac{A}{2},\quad \sqrt{b}=\tan\frac{B}{2},\quad \sqrt{c}=\tan\frac{C}{2}.$$

Như vậy ta phải chứng minh

$$\frac{1}{1+\tan^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{1+\tan^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{1+\tan^2\frac{C}{2}}\leqslant\frac{9}{4},$$

hay

$$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\leqslant\frac{9}{4}.$$

Do $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$ nên bất đẳng thức trên có thể viết lại thành

$$\frac{1+\cos A}{2}+\frac{1+\cos B}{2}+\frac{1+\cos C}{2}\leqslant\frac{9}{4},$$

hay tương đương

$$\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2}.$$

Đây là một BĐT đã quá quen thuộc. □

Ví dụ 9. *Cho ba số thực dương* x, y, z *thỏa mãn điều kiện* $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{z}}=\frac{1}{\sqrt{xyz}}$. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=\frac{2\sqrt{x}}{1+x}+\frac{2\sqrt{y}}{1+y}+\frac{z-1}{z+1}.$$

Lời giải. Điều kiện giả thiết được viết lại là $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1$. Do đó tồn tại tam giác ABC sao cho $\sqrt{x}=\tan\frac{A}{2}$, $\sqrt{y}=\tan\frac{B}{2}$ và $\sqrt{z}=\tan\frac{C}{2}$. Ta có

$$\begin{aligned}P=\sin A+\sin B-\cos C&=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\cos C\\&\leqslant 2\cos\frac{C}{2}-2\cos^2\frac{C}{2}+1=\frac{3}{2}-2\left(\cos\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\cos\frac{A-B}{2}=0$ và $\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$. Điều này chỉ xảy ra khi $C=\frac{2\pi}{3}$ và $A=B=\frac{\pi}{6}$, tức $x=y=\tan^2\frac{\pi}{12}=7-4\sqrt{3}$, $z=\tan^2\frac{\pi}{3}=3$. □

Ví dụ 10 (Iran, 1998). *Cho x, y, $z>1$ thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\leqslant\sqrt{x+y+z}.$$

Chứng minh. Đặt $a=\sqrt{x-1}$, $b=\sqrt{y-1}$ và $c=\sqrt{z-1}$, thì ta có $x=a^2+1$, $y=b^2+1$, $z=c^2+1$. Khi đó, điều kiện bài toán trở thành

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}=2,$$

hay tương đương

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2b^2c^2=1. \tag{1}$$

Cũng từ phép đặt trên, ta có BĐT cần chứng minh được viết lại thành

$$a+b+c\leqslant\sqrt{a^2+b^2+c^2+3}.$$

Bình phương hai vế và rút gọn, ta được

$$ab+bc+ca\leqslant\frac{3}{2}.$$

Nhưng từ (1) suy ra tồn tại tam giác nhọn ABC sao cho $ab=\cos A$, $bc=\cos B$, $ca=\cos C$. Bài toán quy về chứng minh BĐT quen thuộc $\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2}$. □

Nhận xét. Tất nhiên bài toán trên còn có một lời giải khác đơn giản hơn nhiều là: Áp dụng trực tiếp BĐT Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}&=\sqrt{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}+\sqrt{y\left(1-\frac{1}{y}\right)}+\sqrt{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}\\&\leqslant\sqrt{(x+y+z)\left(3-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)}=\sqrt{x+y+z}.\end{aligned}$$

Tuy nhiên cách làm ở trên cũng rất tự nhiên và đáng để ta lưu ý. Trong phần sau ta tiếp tục gặp lại bài toán này.

Ví dụ 11 (Mỹ, 2001). *Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng*

$$0\leqslant ab+bc+ca-abc\leqslant 2.$$

Chứng minh. Chứng minh chặn dưới khá đơn giản. Thật vậy, từ điều kiện giả thiết suy ra ít nhất một trong ba số a, b, c không lớn hơn 1 (vì nếu ngược lại thì $a^2+b^2+c^2+abc>4$). Giả sử số đó là a, thế thì

$$ab+bc+ca-abc=a(b+c)+bc(1-a)\geqslant 0.$$

Tiếp theo, ta chứng minh chặn trên. Điều kiện giả thiết có thể viết lại là

$$\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}+2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{c}{2}=1.$$

Do vậy tồn tại tam giác ABC không tù sao cho $a=2\cos A$, $b=2\cos B$, $c=2\cos C$. BĐT cần chứng minh trở thành

$$2\cos A\cos B+2\cos B\cos C+2\cos C\cos A-4\cos A\cos B\cos C\leqslant 1. \quad (1)$$

Ta có nhận xét sau: có hai trong ba góc A, B, C không lớn hơn 60° hoặc không nhỏ hơn 60°. Không mất tổng quát, giả sử hai góc đó là A và B, khi đó

$$(1-2\cos A)(1-2\cos B)\geqslant 0.$$

Mặt khác, ta có BĐT (1) tương đương với

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)+(2\cos A+2\cos B-4\cos A\cos B)\cos C\leqslant 1,$$
$$\cos(A-B)+(2\cos A+2\cos B-4\cos A\cos B-1)\cos C\leqslant 1,$$
$$\cos(A-B)-(1-2\cos A)(1-2\cos B)\cos C\leqslant 1.$$

Do $(1-2\cos A)(1-2\cos B)\geqslant 0$, $\cos C\geqslant 0$ và $\cos(A-B)\leqslant 1$ nên bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Bài toán được chứng minh xong. □

Nhận xét. Đây là 1 bài toán hay và tương đối khó. Trong cách giải trên ta đã gián tiếp chứng minh được một BĐT trong tam giác khá đẹp sau đây: Với mọi tam giác ABC không tù, ta có

$$(\cos A+\cos B+\cos C)^2\leqslant \sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C.$$

Tiếp theo, ta xem xét một số cách lượng giác hóa khác.

Ví dụ 12 (Toán học và Tuổi trẻ). *Chứng minh rằng nếu a, b, $c\geqslant 1$ thì*

$$\left(a-\frac{1}{b}\right)\left(b-\frac{1}{c}\right)\left(c-\frac{1}{a}\right)\geqslant\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(b-\frac{1}{b}\right)\left(c-\frac{1}{c}\right).$$

Chứng minh. Từ giả thiết, ta suy ra tồn tại x, y, $z\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\frac{1}{a}=\sin x$, $\frac{1}{b}=\sin y$ và $\frac{1}{c}=\sin z$, hay $a=\frac{1}{\sin x}$, $b=\frac{1}{\sin y}$, $c=\frac{1}{\sin z}$. BĐT cần chứng minh có thể viết lại thành

$$\prod\left(\frac{1}{\sin x}-\sin y\right)\geqslant\prod\left(\frac{1}{\sin x}-\sin x\right).$$

Quy đồng mẫu số và rút gọn, ta được

$$(1-\sin x\sin y)(1-\sin y\sin z)(1-\sin z\sin x)\geqslant(1-\sin^2 x)(1-\sin^2 y)(1-\sin^2 z),$$

hay

$$(1-\sin x\sin y)(1-\sin y\sin z)(1-\sin z\sin x)\geqslant \cos^2 x\cos^2 y\cos^2 z.$$

Do $\cos(x-y)\leqslant 1$ và $\cos x\,\cos y>0$ nên ta có

$$1-\sin x\sin y\geqslant \cos(x-y)-\sin x\sin y=\cos x\cos y>0.$$

Tương tự, ta cũng có

$$1-\sin y\sin z\geqslant \cos y\cos z>0,\quad 1-\sin z\sin x\geqslant \cos z\cos x>0.$$

Nhân ba BĐT này lại theo vế, ta có ngay kết quả cần chứng minh. □

Ví dụ 13 (Rumani, 2002). *Cho a, b, c là các số thực thuộc khoảng* (0, 1). *Chứng minh rằng*

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1.$$

Chứng minh. Đặt $a=\cos^2 x$, $b=\cos^2 y$ và $c=\cos^2 z$, với $x,\ y,\ z\in(0,\ \frac{\pi}{2})$. Thay vào, BĐT cần chứng minh trở thành

$$\cos x\cos y\cos z+\sin x\sin y\sin z<1.$$

Nhưng BĐT này chứng minh rất dễ dàng, thật vậy ta có

$$VT<\cos x\cos y+\sin x\sin y=\cos(x-y)\leqslant 1.$$ □

Ví dụ 14 (Việt Nam, 1999). *Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc+a+c=b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=\frac{2}{a^2+1}-\frac{2}{b^2+1}+\frac{3}{c^2+1}.$$

Chứng minh. Điều kiện giả thiết cho có thể viết lại là

$$b=\frac{a+c}{1-ac}.$$

Từ đó đặt $a=\tan A$ và $c=\tan C$ $\left(-\frac{\pi}{2}<A,\ C<\frac{\pi}{2}\right)$ thì ta có

$$b=\frac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\tan C}=\tan(A+C).$$

Thay vào biểu thức đã cho ta được

$$\begin{aligned}P&=\frac{2}{\tan^2 A+1}-\frac{2}{\tan^2(A+C)+1}+\frac{3}{\tan^2 C+1}=2\cos^2 A-2\cos^2(A+C)+3\cos^2 C\\&=\cos 2A-\cos 2(A+C)+3\cos^2 C=2\sin(2A+C)\sin C+3\cos^2 C\\&\leqslant 2|\sin(2A+C)||\sin C|+3\cos^2 C\leqslant 2|\sin C|+3(1-\sin^2 C)\\&=2|\sin C|+3(1-|\sin C|^2)=\frac{10}{3}-3\left(|\sin C|-\frac{1}{3}\right)^2\leqslant\frac{10}{3}.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\sin(2A+C)\sin C\geqslant 0\\|\sin(2A+C)|=1\\|\sin C|=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Vậy $\max P=\frac{10}{3}$. □

Bài tập đề nghị

Bài tập 1. Cho a, b, $c > 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

(a) $\dfrac{a}{1+a^2} + \dfrac{b}{1+b^2} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}}$;

(b) $\dfrac{1-a^2}{1+a^2} + \dfrac{1-b^2}{1+b^2} \leqslant \dfrac{2c}{\sqrt{1+c^2}}$;

(c) $\dfrac{1-a^2}{a} + \dfrac{1-b^2}{b} \geqslant 2c$.

Bài tập 2. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x + y + z = xyz$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Bài tập 3. Chứng minh rằng nếu $0 < x, y, z < 1$ và $xy + yz + zx = 1$, thì

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Bài tập 4. Cho a, b, $c > 0$ thỏa mãn $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{abc}}$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{a}}{a+1} + \frac{\sqrt{b}}{b+1} + \frac{\sqrt{c}}{c+1} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Bài tập 5. Cho a, b, $c > 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$, $a < 1$ và $b < 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} \geqslant \frac{1}{c}.$$

Bài tập 6. Cho a, b, $c > 0$ và $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

(a) $\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}} \leqslant \dfrac{3}{2}$;

(b) $\dfrac{1-a^2}{1+a^2} + \dfrac{1-b^2}{1+b^2} + \dfrac{1-c^2}{1+c^2} \leqslant \dfrac{3}{2}$;

(c) $\dfrac{1-a^2}{1+a^2} + \dfrac{1-b^2}{1+b^2} + \dfrac{1-c^2}{1+c^2} \leqslant \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}}$.

Bài tập 7. Cho a, b, $c > 0$ và $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

(a) $\sqrt{\dfrac{1}{1+a^2} + \dfrac{1}{1+b^2} + \dfrac{1}{1+c^2}} \geqslant \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \dfrac{c}{\sqrt{1+c^2}}$;

(b) $\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{1+c^2}}\right) > 4$.

Bài tập 8. Cho a, b, $c > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Chứng minh rằng

$$a + b + c \leqslant 3.$$

Bài tập 9. Cho a, b, $c > 0$ và $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

a) $\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2} + \sqrt{1+c^2} \geqslant 2\sqrt{3}$;

b) $\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2} - \dfrac{\sqrt{1+c^2}}{c} < 1$;

(c) $\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} < 2\left(a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b}\right)$.

Bài tập 10. Cho a, b, $c > 0$ và $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

(a) $\dfrac{b(1+a^2)}{a^2\sqrt{1+b^2}} + \dfrac{c(1+b^2)}{b^2\sqrt{1+c^2}} + \dfrac{a(1+c^2)}{c^2\sqrt{1+a^2}} \geqslant 6$;

(b) $\dfrac{a^2}{(1+a^2)^2} + \dfrac{b^2}{(1+b^2)^2} + \dfrac{c^2}{(1+c^2)^2} \leqslant \dfrac{9}{16}$.

Bài tập 11. Cho a, b, $c > 0$ và $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

(a) $\dfrac{a}{1+a^2} + \dfrac{b}{1+b^2} + \dfrac{3c}{\sqrt{1+c^2}} \leqslant \sqrt{10}$;

(b) $\sqrt{\dfrac{2a}{1+a^2}} + \sqrt{\dfrac{2b}{1+b^2}} + \sqrt{\dfrac{2c}{1+c^2}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt[4]{1+a^2}} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{1+b^2}} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{1+c^2}}$.

Bài tập 12. Cho a, b, $c > 0$ và $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{2}{1+a^2} - \frac{2}{1+b^2} + \frac{3}{1+c^2}.$$

Bài tập 13. Chứng minh rằng nếu x, y, $z > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ thì

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} + \sqrt{1-z} \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Bài tập 14. Chứng minh rằng nếu x, y, $z > 0$ thỏa mãn $xy + yz + zx + 2xyz = 1$ thì

$$xy + yz + zx \geqslant \frac{3}{4} \geqslant 6xyz.$$

Bài tập 15. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, ta đều có

(a) $-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} \leqslant \dfrac{1}{2}$;

(b) $-\dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{(a^2-b^2)(1-a^2b^2)}{(1+a^2)^2(1+b^2)^2} \leqslant \dfrac{1}{4}$.

Bài tập 16. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c ta đều có

$$\frac{|a-b|}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}} \leqslant \frac{|a-c|}{\sqrt{(1+a^2)(1+c^2)}} + \frac{|c-b|}{\sqrt{(1+c^2)(1+b^2)}}.$$

Bài tập 17. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c,

$$(ab + bc + ca - 1)^2 \leqslant (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1).$$

Hướng dẫn. Lượng giác hóa bằng cách đặt $a = \tan x$, $b = \tan y$, $c = \tan z$ với $|x|, |y|, |z| < \frac{\pi}{2}$. Ngoài ra cũng có thể chứng minh trực tiếp bằng phương pháp biến đổi tương đương.

Bài tập 18. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Chứng minh rằng

(a) $xyz \leqslant \dfrac{1}{8}$;

(b) $x + y + z \leqslant \dfrac{3}{2}$;

(c) $xy + yz + zx \leqslant \dfrac{3}{4} \leqslant x^2 + y^2 + z^2$;

(d) $xy + yz + zx \leqslant \dfrac{1}{2} + 2xyz$.

Bài tập 19. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z = xyz$. Chứng minh rằng

$$xy + yz + zx \geqslant 3 + \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1}.$$

2 Phương pháp đổi biến đại số

Các bổ đề được trình bày trong phần này rất hữu ích trong một số bài toán về BĐT.

Bổ đề 4.

(*a*) *Nếu ba số dương a, b, c có tích bằng* 1, *thì*

(*i*) *Tồn tại các số dương x, y, z sao cho*

$$a = \frac{x}{y},\ b = \frac{y}{z},\ c = \frac{z}{x}, \quad hay \quad a = \frac{y}{x},\ b = \frac{z}{y},\ c = \frac{x}{z}.$$

(*ii*) *Tồn tại các số dương m, n, p sao cho*

$$a = \frac{m^2}{np},\ b = \frac{n^2}{pm},\ c = \frac{p^2}{mn}, \quad hay \quad a = \frac{np}{m^2},\ b = \frac{pm}{n^2},\ c = \frac{mn}{p^2}.$$

(*b*) *Nếu các số dương* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *có tích bằng* 1 *thì tồn tại* $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ *sao cho*

$$a_1 = \frac{x_1}{x_2},\ a_2 = \frac{x_2}{x_3},\ \ldots,\ a_n = \frac{x_n}{x_1}, \quad hay \quad a_1 = \frac{x_2}{x_1},\ a_2 = \frac{x_3}{x_2},\ \ldots,\ a_n = \frac{x_1}{x_n}.$$

Chứng minh. **(a.i)** Chẳng hạn, chọn $x = 1$, $y = \frac{1}{a}$ và $z = \frac{1}{ab}$ thì ta có ngay

$$\frac{x}{y} = a, \quad \frac{y}{z} = b, \quad \frac{z}{x} = \frac{1}{ab} = c.$$

Ngược lại, nếu chọn $x = 1$, $y = a$, $z = ab$ thì ta sẽ có $\frac{y}{x} = a$, $\frac{z}{y} = b$ và $\frac{x}{z} = c$.

(a.ii) Ví dụ, chọn $m = \sqrt[3]{a}$, $n = \sqrt[3]{b}$ và $p = \sqrt[3]{c}$ thì ta có $mnp = 1$ và

$$\frac{m^2}{np} = m^3 = a, \quad \frac{n^2}{pm} = n^3 = b, \quad \frac{p^2}{mn} = p^3 = c.$$

Ngược lại, nếu chọn $m = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$, $n = \frac{1}{\sqrt[3]{b}}$, và $p = \frac{1}{\sqrt[3]{c}}$ thì ta sẽ có $\frac{np}{m^2} = a$, $\frac{pm}{n^2} = b$ và $\frac{mn}{p^2} = c$.

(b) Tương tự như (a.i), ta có thể chọn $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{a_1}$, $x_3 = \frac{1}{a_1a_2}$, $\ldots$, $x_n = \frac{1}{a_1a_2\cdots a_{n-1}}$. □

Bổ đề 5.

(*a*) *Nếu ba số dương* a, b, c *có tổng bằng* k *thì tồn tại các số dương* x, y, z *sao cho*

$$a = \frac{kx}{x+y+z}, \quad b = \frac{ky}{x+y+z}, \quad c = \frac{kz}{x+y+z}.$$

(*b*) *Nếu các số dương* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *có tổng bằng* k *thì tồn tại* $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ *sao cho*

$$a_1 = \frac{kx_1}{x_1+x_2+\cdots+x_n}, \quad a_2 = \frac{kx_2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{kx_n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}.$$

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh (b) là đủ (vì nó là tổng quát của (a)), và kết quả này có thể thu được bằng cách chọn $x_i = a_i$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$. □

Bổ đề 6.

(*a*) *Nếu* $x, y, z > 0$ *thỏa mãn điều kiện* $xyz = x+y+z+2$ *thì tồn tại* $a, b, c > 0$ *sao cho*

$$x = \frac{b+c}{a}, \quad y = \frac{c+a}{b}, \quad z = \frac{a+b}{c}.$$

(*b*) *Nếu* $x, y, z > 0$ *thỏa mãn* $xy+yz+zx+2xyz = 1$ *thì tồn tại* $a, b, c > 0$ *sao cho*

$$x = \frac{a}{b+c}, \quad y = \frac{b}{c+a}, \quad z = \frac{c}{a+b}.$$

Chứng minh. (a) Chú ý rằng giả thiết $xyz = x+y+z+2$ có thể viết lại thành

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 1.$$

Do đó theo bổ đề 5, tồn tại các số dương a, b, c sao cho

$$\frac{1}{1+x} = \frac{a}{a+b+c}, \quad \frac{1}{1+y} = \frac{b}{a+b+c}, \quad \frac{1}{1+z} = \frac{c}{a+b+c},$$

từ đây ta có

$$x = \frac{b+c}{a}, \quad y = \frac{c+a}{b}, \quad z = \frac{a+b}{c}.$$

(b) Điều kiện $xy+yz+zx+2xyz = 1$ tương đương với

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 2 = \frac{1}{xyz}.$$

Vì thế, theo (a), ta thấy tồn tại các số dương a, b, c sao cho

$$\frac{1}{x} = \frac{b+c}{a}, \quad \frac{1}{y} = \frac{c+a}{b}, \quad \frac{1}{z} = \frac{a+b}{c},$$

hay

$$x = \frac{a}{b+c}, \quad y = \frac{b}{c+a}, \quad z = \frac{c}{a+b}.$$

Bổ đề 6 được chứng minh. □

Bổ đề tiếp theo là một BĐT đối xứng ba biến rất nổi tiếng và có nhiều ứng dụng.

Bổ đề 7 (Bất đẳng thức Schur). *Với mọi số thực không âm a, b, c, k, ta có*

$$a^k(a-b)(a-c)+b^k(b-c)(b-a)+c^k(c-a)(c-b)\geqslant 0.$$

Chứng minh. Có nhiều cách chứng minh cho BĐT Schur, ở đây xin nêu một cách chứng minh đơn giản nhất. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a\geqslant b\geqslant c\geqslant 0$, khi đó

$$\sum a^k(a-b)(a-c)=(a-b)\left[a^k(a-c)-b^k(b-c)\right]+c^k(a-c)(b-c)\geqslant 0$$

do $a-b\geqslant 0$, $a^k\geqslant b^k\geqslant 0$ và $a-c\geqslant b-c\geqslant 0$. □

Nhận xét. Trong trường hợp đặc biệt $k=1$, ta được

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geqslant ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

Ta thường áp dụng BĐT Schur ở dạng bậc nhất này.

Bây giờ ta sẽ sử dụng các phép đổi biến ở trên để chứng minh một số BĐT.

Ví dụ 15 (IMO, 2000). *Cho x, y, z là các số dương có tích bằng 1. Chứng minh rằng*

$$\left(x+\frac{1}{y}-1\right)\left(y+\frac{1}{z}-1\right)\left(z+\frac{1}{x}-1\right)\leqslant 1.$$

Chứng minh. Do $xyz=1$ nên tồn tại a, b, $c>0$ sao cho $x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{b}{c}$ và $z=\frac{c}{a}$. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}-1\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{a}{c}-1\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{b}{a}-1\right)\leqslant 1,$$

hay là

$$(a+c-b)(b+a-c)(c+b-a)\leqslant abc. \quad (1)$$

Nhận thấy rằng tổng của hai số bất kỳ trong ba số $a+c-b$, $b+a-c$, $c+b-a$ luôn có kết quả là một số dương, do đó trong ba số ấy có nhiều nhất là một số âm. Nếu có một số âm thì (1) hiển nhiên đúng vì vế trái âm còn vế phải dương. Xét trường hợp cả $a+c-b$, $b+a-c$ và $c+b-a$ đều không âm, khi đó áp dụng BĐT AM-GM ta có

$$\sqrt{(a+c-b)(b+a-c)}\leqslant a,\quad \sqrt{(b+a-c)(c+b-a)}\leqslant b,\quad \sqrt{(c+b-a)(a+c-b)}\leqslant c.$$

Nhân ba BĐT này lại theo vế, ta thu được ngay (1). □

Ví dụ 16. *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc\leqslant 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant a+b+c.$$

Chứng minh. Đặt $abc=1-k$ với $1>k\geqslant 0$. Khi đó, ta có $\frac{a}{\sqrt[3]{1-k}}\cdot\frac{b}{\sqrt[3]{1-k}}\cdot\frac{c}{\sqrt[3]{1-k}}=1$. Do vậy tồn tại các số dương x, y, z sao cho

$$a=\sqrt[3]{1-k}\cdot\frac{x}{y},\quad b=\sqrt[3]{1-k}\cdot\frac{y}{z},\quad c=\sqrt[3]{1-k}\cdot\frac{z}{x}.$$

BĐT cần chứng minh trở thành

$$\frac{xz}{y^2}+\frac{yx}{z^2}+\frac{zy}{x^2} \geqslant \sqrt[3]{1-k}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right).$$

Do $\sqrt[3]{1-k} \leqslant 1$ nên ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{xz}{y^2}+\frac{yx}{z^2}+\frac{zy}{x^2} \geqslant \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x},$$

hay

$$x^3z^3+y^3x^3+z^3y^3 \geqslant xyz(x^2z+y^2x+z^2y). \tag{1}$$

Áp dụng BĐT AM-GM, ta có

$$x^3z^3+x^3z^3+y^3x^3 \geqslant 3x^3yz^2, \quad y^3x^3+y^3x^3+z^3y^3 \geqslant 3x^2y^3z, \quad z^3y^3+z^3y^3+x^3z^3 \geqslant 3xy^2z^3.$$

Cộng ba BĐT này lại theo vế, ta thu được BĐT (1). □

Ví dụ 17 (Nga, 2004). *Cho $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0\,(n > 3)$ có tích bằng 1. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2}+\frac{1}{1+x_2+x_2x_3}+\cdots+\frac{1}{1+x_n+x_nx_1} > 1.$$

Chứng minh. Từ giả thiết, ta thấy tồn tại $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ để

$$x_1=\frac{a_2}{a_1}, \quad x_2=\frac{a_3}{a_2}, \quad \ldots, \quad x_n=\frac{a_1}{a_n}.$$

Thay vào, BĐT cần chứng minh trở thành

$$\frac{a_1}{a_1+a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_2+a_3+a_4}+\cdots+\frac{a_n}{a_n+a_1+a_2} > 1,$$

và ta có thể thấy ngay BĐT này đúng do $\frac{a_i}{a_i+a_{i+1}+a_{i+2}} \geqslant \frac{a_i}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$ (ở đây ta xét theo module n, tức là $a_{n+1}=a_1$ và $a_{n+2}=a_2$). □

Ví dụ 18 (Iran, 1998). *Cho $x, y, z > 1$ thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1} \leqslant \sqrt{x+y+z}.$$

Chứng minh. Ở phần trước ta đã sử dụng phương pháp lượng giác hóa để giải bài này. Bây giờ, ta sẽ chứng minh nó bằng cách sử dụng phép đổi biến đại số: Giả thiết của bài toán có thể được viết lại thành

$$\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}=1.$$

Do $x-1>0$, $y-1>0$ và $z-1>0$ nên từ đây ta thấy tồn tại các số dương a, b, c sao cho

$$\frac{x-1}{x}=\frac{a}{a+b+c}, \quad \frac{y-1}{y}=\frac{b}{a+b+c}, \quad \frac{z-1}{z}=\frac{c}{a+b+c},$$

hay

$$x=\frac{a+b+c}{b+c}, \quad y=\frac{a+b+c}{c+a}, \quad z=\frac{a+b+c}{a+b}.$$

Như vậy ta phải chứng minh

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}\leqslant\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)}.$$

Đến đây, áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\sum\sqrt{\frac{a}{b+c}}&=\sqrt{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{b+c}}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{\frac{1}{c+a}}+\sqrt{c}\cdot\sqrt{\frac{1}{a+b}}\\&\leqslant\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)}.\end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh. □

Ví dụ 19 (Latvia, 2002). *Cho a, b, c, $d>0$ thỏa mãn điều kiện*

$$\frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+b^4}+\frac{1}{1+c^4}+\frac{1}{1+d^4}=1.$$

Chứng minh rằng

$$abcd\geqslant 3.$$

Chứng minh. Từ giả thiết, ta suy ra tồn tại các số dương x, y, z, t sao cho $\frac{1}{1+a^4}=\frac{x}{x+y+z+t}$, $\frac{1}{1+b^4}=\frac{y}{x+y+z+t}$, $\frac{1}{1+c^4}=\frac{z}{x+y+z+t}$, $\frac{1}{1+d^4}=\frac{t}{x+y+z+t}$, hay

$$a=\sqrt[4]{\frac{y+z+t}{x}},\quad b=\sqrt[4]{\frac{z+t+x}{y}},\quad c=\sqrt[4]{\frac{t+x+y}{z}},\quad d=\sqrt[4]{\frac{x+y+z}{t}}.$$

Thay vào, BĐT cần chứng minh trở thành

$$\sqrt[4]{\frac{y+z+t}{x}}\cdot\sqrt[4]{\frac{z+t+x}{y}}\cdot\sqrt[4]{\frac{t+x+y}{z}}\cdot\sqrt[4]{\frac{x+y+z}{t}}\geqslant 3,$$

tương đương

$$(y+z+t)(z+t+x)(t+x+y)(x+y+z)\geqslant 81xyzt.$$

BĐT này chứng minh dễ dàng! □

Ví dụ 20 (Pháp, 2005). *Cho a, b, $c>0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geqslant 3.$$

Chứng minh. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant 3abc. \tag{1}$$

Đặt $a^2=\frac{3x}{x+y+z}$, $b^2=\frac{3y}{x+y+z}$, $c^2=\frac{3z}{x+y+z}$ với x, y, $z>0$ thì ta có

$$a=\sqrt{\frac{3x}{x+y+z}},\quad b=\sqrt{\frac{3y}{x+y+z}},\quad c=\sqrt{\frac{3z}{x+y+z}}.$$

BĐT (1) trở thành

$$\frac{9xy}{(x+y+z)^2}+\frac{9yz}{(x+y+z)^2}+\frac{9zx}{(x+y+z)^2}\geqslant 3\sqrt{\frac{27xyz}{(x+y+z)^3}},$$

Sau khi quy đồng và khử mẫu, ta được

$$xy+yz+zx\geqslant\sqrt{3xyz(x+y+z)},$$

hay tương đương

$$(xy+yz+zx)^2\geqslant 3xyz(x+y+z).$$

Đây là một kết quả quen thuộc. □

Ví dụ 21. *Cho số tự nhiên $n\geqslant 2$ và $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực dương thỏa mãn*

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}=1.$$

Chứng minh rằng

$$x_1x_2\ldots x_n\geqslant(n-1)^n.$$

Chứng minh. Tồn tại $a_1, a_2, \ldots, a_n>0$ sao cho $\frac{1}{1+x_k}=\frac{a_k}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$, $\forall 1\leqslant k\leqslant n$, hay

$$x_k=\frac{a_1+\cdots+a_{k-1}+a_{k+1}+\cdots+a_n}{a_k},\quad \forall 1\leqslant k\leqslant n.$$

BĐT cần chứng minh trở thành

$$\frac{a_2+a_3+\cdots+a_n}{a_1}\cdot\frac{a_1+a_3+\cdots+a_n}{a_2}\cdots\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{a_n}\geqslant(n-1)^n.$$

Phần việc còn lại là rất đơn giản! □

Ví dụ 22. *Cho $x, y, z>0$ thỏa mãn $xy+yz+zx+2xyz=1$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt[3]{yz}+\sqrt[3]{2}\leqslant\sqrt[3]{3(y+1)(z+1)}.$$

Chứng minh. Đặt $x=\frac{a}{b+c}$, $y=\frac{b}{c+a}$, $z=\frac{c}{a+b}$ với $a, b, c>0$. BĐT cần chứng minh trở thành

$$\sqrt[3]{\frac{b}{c+a}\cdot\frac{c}{a+b}}+\sqrt[3]{2}\leqslant\sqrt[3]{3\cdot\frac{(a+b+c)^2}{(c+a)(a+b)}},$$

$$\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{2(a+b)(a+c)}\leqslant\sqrt[3]{3(a+b+c)^2},$$

$$\sqrt[3]{\frac{b}{a+b+c}\cdot\frac{c}{a+b+c}}+\sqrt[3]{2\cdot\frac{a+b}{a+b+c}\cdot\frac{a+c}{a+b+c}}\leqslant\sqrt[3]{3}.$$

Áp dụng BĐT AM-GM ta có

$$\sqrt[3]{\frac{b}{a+b+c}\cdot\frac{c}{a+b+c}\cdot\frac{1}{3}}\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}+\frac{1}{3}\right),$$

$$\sqrt[3]{\frac{a+b}{a+b+c}\cdot\frac{a+c}{a+b+c}\cdot\frac{2}{3}}\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{a+c}{a+b+c}+\frac{2}{3}\right).$$

Cộng hai BĐT trên lại, ta được ngay kết quả cần chứng minh. □

Ví dụ 23 (Ấn Độ, 1998). *Cho a, b, $c > 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$. Chứng minh rằng*

$$a+b+c \geqslant ab+bc+ca.$$

Chứng minh. Bài toán này đã được giải bằng phương pháp lượng giác hóa. Ở đây ta trình bày một lời giải khác đơn giản hơn: Điều kiện ở giả thiết có thể viết lại như sau

$$\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}+\frac{b}{2}\cdot\frac{c}{2}+\frac{c}{2}\cdot\frac{a}{2}+2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{c}{2}=1.$$

Như vậy tồn tại các số dương x, y, z sao cho $\frac{a}{2}=\frac{x}{y+z}$, $\frac{b}{2}=\frac{y}{z+x}$, $\frac{c}{2}=\frac{z}{x+y}$, hay

$$a=\frac{2x}{y+z},\quad b=\frac{2y}{z+x},\quad c=\frac{2z}{x+y}.$$

Ta phải chứng minh

$$\frac{2x}{y+z}+\frac{2y}{z+x}+\frac{2z}{x+y}\geqslant\frac{4xy}{(y+z)(z+x)}+\frac{4yz}{(z+x)(x+y)}+\frac{4zx}{(x+y)(y+z)},$$

hay

$$x(x+y)(x+z)+y(y+z)(y+x)+z(z+x)(z+y)\geqslant 2xy(x+y)+2yz(y+z)+2zx(z+x).$$

Chú ý rằng

$$\begin{aligned}(x+y)(x+z)&=x^2+xy+yz+zx,\\(y+z)(y+x)&=y^2+xy+yz+zx,\\(z+x)(z+y)&=z^2+xy+yz+zx.\end{aligned}$$

Do đó, BĐT trên tương đương với

$$(x+y+z)(xy+yz+zx)+x^3+y^3+z^3\geqslant 2xy(x+y)+2yz(y+z)+2zx(z+x),$$

hay

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\geqslant xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x),$$

đúng do đây chính là BĐT Schur bậc nhất. □

Ví dụ 24. *Chứng minh rằng nếu x, y, $z>0$ thỏa mãn $xyz=x+y+z+2$, thì*

$$2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)\leqslant x+y+z+6.$$

Chứng minh. Ta có $2\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2-(x+y+z)$. Do đó BĐT cần chứng minh có thể viết lại như sau

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leqslant\sqrt{2(x+y+z+3)}.$$

Từ điều kiện giả thiết suy ra tồn tại a, b, $c>0$ sao cho

$$x=\frac{b+c}{a},\quad y=\frac{c+a}{b},\quad z=\frac{a+b}{c}.$$

Như vậy ta phải chứng minh

$$\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}+\sqrt{\frac{a+b}{c}}\leqslant\sqrt{2(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz, ta có

$$\sum \sqrt{\frac{b+c}{a}} = \sqrt{b+c} \cdot \sqrt{\frac{1}{a}} + \sqrt{c+a} \cdot \sqrt{\frac{1}{b}} + \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{\frac{1}{c}}$$
$$\leqslant \sqrt{2(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}.$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Ví dụ 25. *Chứng minh rằng nếu x, y, $z > 0$ thỏa mãn $xy + yz + zx + 2xyz = 1$ thì*

$$xy + yz + zx \geqslant \frac{3}{4} \geqslant 6xyz.$$

Chứng minh. (a) *Chứng minh vế trái.* Đặt $x = \frac{a}{b+c}$, $y = \frac{b}{c+a}$ và $z = \frac{c}{a+b}$ với a, b, $c > 0$. Khi đó BĐT cần chứng minh có thể viết lại thành

$$\frac{ab}{(b+c)(c+a)} + \frac{bc}{(c+a)(a+b)} + \frac{ca}{(a+b)(b+c)} \geqslant \frac{3}{4},$$
$$ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geqslant \frac{3}{4}(a+b)(b+c)(c+a),$$
$$(a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc \geqslant \frac{3}{4}\left[(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc\right],$$
$$(a+b+c)(ab+bc+ca) \geqslant 9abc.$$

BĐT cuối hiển nhiên đúng theo AM-GM.

(b) *Chứng minh vế phải.* Do $6xyz = 3(1 - xy - yz - zx)$ nên BĐT đã cho tương đương với

$$xy + yz + zx \geqslant \frac{3}{4}.$$

Đây chính là kết quả vừa được chứng minh ở phần (a). □

2.2 Bài tập đề nghị

Bài tập 20. Cho a, b, $c > 0$ thỏa mãn $\frac{1}{1+2a} + \frac{1}{1+2b} + \frac{1}{1+2c} = 1$. Chứng minh rằng

$$abc \geqslant 1.$$

Bài tập 21 (Việt Nam, 1998). Cho số tự nhiên $n \geqslant 2$ và x_1, x_2, ..., x_n là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{x_1+1998} + \frac{1}{x_2+1998} + \cdots + \frac{1}{x_n+1998} = \frac{1}{1998}$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}}{n-1} \geqslant 1998.$$

Bài tập 22. Cho số tự nhiên $n \geqslant 2$ và x_1, x_2, ..., x_n là các số thực dương thỏa mãn

$$\frac{x_1}{1+x_1} + \frac{x_2}{1+x_2} + \cdots + \frac{x_n}{1+x_n} = 1.$$

Chứng minh rằng

$$x_1 x_2 \cdots x_n \leqslant \frac{1}{(n-1)^n}.$$

Bài tập 23 (Trung Quốc, 2005). Cho các số dương a, b, c, d có tích bằng 1. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\geqslant 1.$$

Bài tập 24. Chứng minh rằng nếu a, b, $c>0$ thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ thì
$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1}\geqslant 3\sqrt{2}.$$

Bài tập 25. Cho a, b, $c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng
$$\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+ca}{1+c}\geqslant 3.$$

Bài tập 26 (Nga, 2003). Cho a, b, $c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng .
$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\geqslant\frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}.$$

Bài tập 27 (Canada, 2008). Cho a, b, $c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng
$$\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\leqslant\frac{3}{2}.$$

Bài tập 28. Cho x, y, $z>0$ thỏa mãn $xy+yz+zx+2xyz=1$. Chứng minh rằng
$$\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1}\leqslant 2\sqrt{(x+1)(y+1)(z+1)}.$$

Bài tập 29. Chứng minh rằng nếu x, y, $z>0$ thỏa mãn $xy+yz+zx+2xyz=1$ thì
$$\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}+\sqrt[4]{z}\leqslant\sqrt[4]{12(x+1)(y+1)(z+1)}.$$

Bài tập 30. Cho x, y, $z>0$ thỏa mãn $xyz=x+y+z+2$. Chứng minh rằng
$$xyz(x-1)(y-1)(z-1)\leqslant 8.$$

Bài tập 31. Cho x, y, $z>0$ thỏa mãn $xy+yz+zx+2xyz=1$. Chứng minh rằng
$$(x+1)(y+1)+(y+1)(z+1)+(z+1)(x+1)\geqslant\frac{27}{4}.$$

Bài tập 32. Chứng minh rằng nếu x, y, $z>0$ thỏa mãn $xy+yz+zx+2xyz=1$ thì
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\geqslant 4(x+y+z).$$

Bài tập 33. Cho x, y, $z>0$ thỏa mãn $xyz=x+y+z+2$. Chứng minh rằng

(a) $xy+yz+zx\geqslant 2(x+y+z)$;

(b) $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{xyz}$.

Bài tập 34. Cho x, y, $z>2$ thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Chứng minh rằng

(a) $(x-1)(y-1)(z-1)\geqslant 8$;

(b) $(x-2)(y-2)(z-2)\leqslant 1$.

Bài tập 35 (Balkan MO). Cho a, b, c là các số thực dương có tích bằng 1. Chứng minh rằng
$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+6\geqslant 2\left(a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Hướng dẫn. Đặt $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$, $c=\frac{z}{x}$, sau đó khai triển và thu gọn ta nhận được BĐT Schur bậc nhất.

3 Một vài kiểu đổi biến khác

Trong mục này ta có một kết quả sau thường được gọi là "phép thế Ravi".

Bổ đề 8. *Các số thực a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác khi và chỉ khi tồn tại các số dương x, y, z sao cho $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$.*

Chứng minh. Ta có

$$\begin{cases} a = y + z \\ b = z + x \\ c = x + y \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{b + c - a}{2}, y = \frac{c + a - b}{2}, z = \frac{a + b - c}{2}.$$

Do đó nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì ta có thể đặt

$$x = \frac{b + c - a}{2}, \quad y = \frac{c + a - b}{2}, \quad z = \frac{a + b - c}{2}$$

để có x, y, $z > 0$ và $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$.

Ngược lại, nếu có x, y, $z > 0$ thì rõ ràng các số a, b, c xác định bởi $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$ thỏa mãn các BĐT tam giác nên chúng là độ dài ba cạnh của một tam giác. □

Nhận xét. Phép thế Ravi giúp ta chuyển một bài toán BĐT với ba số dương về một BĐT trong tam giác và ngược lại.

Ví dụ 26. *Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì*

$$a(b + c - a) < 2bc.$$

Chứng minh. Sử dụng phép đổi biến $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$ với x, y, $z > 0$, BĐT cần chứng minh trở thành

$$x(y + z) < (x + y)(z + x).$$

Tới đây, áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz, ta có

$$(x + y)(z + x) \geqslant \left(\sqrt{xz} + \sqrt{yx}\right)^2 = xy + xz + 2x\sqrt{yz} > xz + yx.$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Ví dụ 27. *Cho x, y, $z > 0$ thỏa mãn điều kiện $xyz(x + y + z) = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của*

$$P = (x + y)(x + z).$$

Chứng minh. Đặt $a = y + z$, $b = z + x$ và $c = x + y$, khi đó a, b, c sẽ là độ dài ba cạnh của một tam giác ABC nào đó. Và ta có

$$x = \frac{b + c - a}{2} = p - a, \quad y = \frac{c + a - b}{2} = p - b, \quad z = \frac{a + b - c}{2} = p - c.$$

Điều kiện đã cho trở thành $p(p - a)(p - b)(p - c) = 1$ hay $S = 1$ (ở đây S là diện tích của tam giác ABC). Từ đây, ta có

$$P = bc \geqslant bc \sin A = 2S = 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sin A = 1 \\ bc = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + c^2 = a^2 \\ bc = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(y + z) = yz \\ (x + y)(x + z) = 2 \end{cases}$$

Vậy $\min P = 2$. □

Nhận xét. Tất nhiên bài toán trên còn có một lời giải đơn giản khác bằng AM-GM như sau

$$A = x^2 + xy + yz + zx = x(x+y+z) + yz \geqslant 2\sqrt{xyz(x+y+z)} = 2.$$

Tuy nhiên lời giải trên cho ta một "cái nhìn" rất tự nhiên.

Ví dụ 28. *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có diện tích S. Chứng minh rằng*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

Chứng minh. Đặt $a = y + z$, $b = z + x$ và $c = x + y$ với x, y, $z > 0$. Khi đó ta có

$$p = x + y + z, \quad p - a = x, \quad p - b = y, \quad p - c = z, \quad S = \sqrt{xyz(x+y+z)}.$$

Do đó, BĐT cần chứng minh có thể được viết lại thành

$$(y+z)^2 + (z+x)^2 + (x+y)^2 \geqslant 4\sqrt{3xyz(x+y+z)} + (y-x)^2 + (z-y)^2 + (x-z)^2.$$

Sau khi thu gọn ta được

$$xy + yz + zx \geqslant \sqrt{3xyz(x+y+z)},$$

hay

$$(xy + yz + zx)^2 \geqslant 3(xy \cdot yz + yz \cdot zx + zx \cdot xy).$$

Đây là một kết quả cơ bản. □

Nhận xét. Đây là một bài toán không đơn giản nhưng với cách đổi biến như trên ta đã có được một lời giải rất tự nhiên.

Ví dụ 29 (IMO, 1984). *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geqslant 0.$$

Chứng minh. Do a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên tồn tại x, y, $z > 0$ sao cho $a = y+z$, $b = z + x$, $c = x + y$. Thay vào, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(y+z)^2(z+x)(y-x) + (z+x)^2(x+y)(z-y) + (x+y)^2(y+z)(x-z) \geqslant 0,$$

tương đương

$$x^3z + y^3x + z^3y \geqslant x^2yz + xy^2z + xyz^2,$$

hay

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geqslant x + y + z.$$

BĐT này chứng minh dễ dàng! □

Ví dụ 30. *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^2(b+c)} + \frac{1}{b^2(c+a)} + \frac{1}{c^2(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Chứng minh. Đặt $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$, $c = \frac{1}{z}$ thì ta có $xyz = 1$, và BĐT cần chứng minh trở thành

$$\frac{x^2}{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}} + \frac{y^2}{\frac{1}{z} + \frac{1}{x}} + \frac{z^2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \geqslant \frac{3}{2},$$

tương đương

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Đây chính là BĐT Nesbitt. □

Ví dụ 31. *Cho a, b, c > 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \frac{3a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{5c}{a+b}.$$

Chứng minh. Đặt $x = b + c$, $y = c + a$ và $z = a + b$, khi đó ta có x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác và

$$a = \frac{y+z-x}{2}, \quad b = \frac{z+x-y}{2}, \quad c = \frac{x+y-z}{2}.$$

Biểu thức P được viết lại thành

$$\begin{aligned} P &= \frac{3(y+z-x)}{2x} + \frac{2(z+x-y)}{y} + \frac{5(x+y-z)}{2z} \\ &= \left(\frac{2x}{y} + \frac{3y}{2x}\right) + \left(\frac{5y}{2z} + \frac{2z}{y}\right) + \left(\frac{3z}{2x} + \frac{5x}{2z}\right) - 6. \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{2x}{y} + \frac{3y}{2x} \geqslant 2\sqrt{3}, \quad \frac{5y}{2z} + \frac{2z}{y} \geqslant 2\sqrt{5}, \quad \frac{3z}{2x} + \frac{5x}{2z} \geqslant \sqrt{15}.$$

Từ đó suy ra

$$P \geqslant 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + \sqrt{15} - 6.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{y}{2} = \frac{z}{\sqrt{5}} > 0$ (thỏa x, y, z là độ dài ba cạnh tam giác). Vậy $\min P = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + \sqrt{15} - 6$. □

Ví dụ 32 (Balkan, 2006). *Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geqslant \frac{3}{1+abc}.$$

Chứng minh. Đặt $abc = k^3$, với k là một số thực dương nào đó. Khi đó, ta thấy tồn tại x, y, $z > 0$ để $a = k = \frac{ky}{x}$, $b = k = \frac{kz}{y}$, $c = \frac{kx}{z}$. BĐT cần chứng minh được viết lại thành

$$\frac{x}{y+kz} + \frac{y}{z+kx} + \frac{z}{x+ky} \geqslant \frac{3k}{1+k^3}.$$

Sử dụng BĐT Cauchy-Schwarz kết hợp với BĐT cơ bản $(x+y+z)^2 \geqslant 3(xy+yz+zx)$, ta có

$$VT = \frac{x^2}{xy+kzx} + \frac{y^2}{yz+kxy} + \frac{z^2}{zx+kyz} \geqslant \frac{(x+y+z)^2}{(1+k)(xy+yz+zx)} \geqslant \frac{3}{1+k}.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{1+k} \geqslant \frac{k}{1+k^3},$$

nhưng đây lại là một BĐT đơn giản và có thể chứng minh khá dễ dàng. □

Ví dụ 33. *Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{4c}{2a+b} + \frac{4a}{b+2c} + \frac{b}{c+a} \geqslant 3.$$

Chứng minh. Đặt $x = 2a + b$, $y = b + 2c$ và $z = c + a$, thì ta có

$$a = \frac{x - y + 2z}{4}, \quad b = \frac{x + y - 2z}{2}, \quad c = \frac{y - x + 2z}{4}.$$

Do đó, BĐT cần chứng minh trở thành

$$\frac{y - x + 2z}{x} + \frac{x - y + 2z}{y} + \frac{x + y - 2z}{2z} \geqslant 3,$$

tương đương

$$\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{2z}{x} + \frac{x}{2z}\right) + \left(\frac{2z}{y} + \frac{y}{2z}\right) \geqslant 6.$$

Rõ ràng BĐT này đúng theo BĐT AM-GM. □

Ví dụ 34. *Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a + 2b}{5c + 4a} + \frac{3c}{4a + 4b + c} + \frac{c + 2a}{a + 2b + 6c} \geqslant 1.$$

Chứng minh. Đặt $x = a + 2b$, $y = 3c$ và $z = c + 2a$. Khi đó, BĐT cần chứng minh tıở thành

$$\frac{x}{y + 2z} + \frac{y}{z + 2x} + \frac{z}{x + 2y} \geqslant 1.$$

Bây giờ, áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz và BĐT cơ bản $(x + y + z)^2 \geqslant 3(xy + yz + zx)$, ta có

$$\begin{aligned}\frac{x}{y + 2z} + \frac{y}{z + 2x} + \frac{z}{x + 2y} &= \frac{x^2}{xy + 2zx} + \frac{y^2}{yz + 2xy} + \frac{z^2}{zx + 2yz} \\ &\geqslant \frac{(x + y + z)^2}{3(xy + yz + zx)} \geqslant 1.\end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Ví dụ 35 (Iran, 2007). *Cho a, b, c là các số thực dương khác nhau đôi một. Chứng minh rằng*

$$\left|\frac{a + b}{a - b} + \frac{b + c}{b - c} + \frac{c + a}{c - a}\right| > 1.$$

Chứng minh. Do tính đối xứng nên ta có thể giả sử $a > b > c$. Từ đó đặt $a = c + x$, $b = c + y$ với $x > y > 0$, ta có

$$\begin{aligned}\left|\frac{a + b}{a - b} + \frac{b + c}{b - c} + \frac{c + a}{c - a}\right| &= \left|\frac{2c + x + y}{x - y} + \frac{2c + y}{y} - \frac{2c + x}{x}\right| \\ &= \left|2c\left(\frac{1}{x - y} + \frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) + \frac{x + y}{x - y}\right| \\ &= \left|2c\left(\frac{1}{x - y} + \frac{x - y}{xy}\right) + \frac{x + y}{x - y}\right|.\end{aligned}$$

Từ đây với chú ý $2c\left(\frac{1}{x-y} + \frac{x-y}{xy}\right) > 0$ và $\frac{x+y}{x-y} > 1$, ta suy ra ngay kết quả cần chứng minh. □

Ví dụ 36. *Cho $a, b, c \geqslant -1$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$A = a + b + c.$$

Chứng minh. Đặt $a = x - 1$, $b = y - 1$ và $c = z - 1$ với x, y, $z \geqslant 0$. Điều kiện giả thiết có thể viết lại là $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 6$, hay

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + y + z) = 3.$$

Vì $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant (x + y + z)^2$ nên từ trên suy ra

$$(x + y + z)^2 - 2(x + y + z) \geqslant 3.$$

Giải bất phương trình này, ta được

$$x + y + z \geqslant 3.$$

Từ đó suy ra $A = x + y + z - 3 \geqslant 0$. Đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $a = b = -1$ và $c = 2$. □

Ví dụ 37 (IMO, 2001). *Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c, ta có*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1.$$

Chứng minh. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{\sqrt{1+8\cdot\frac{bc}{a^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1+8\cdot\frac{ca}{b^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1+8\cdot\frac{ab}{c^2}}} \geqslant 1.$$

Đặt $x = \frac{bc}{a^2}$, $y = \frac{ca}{b^2}$, $z = \frac{ab}{c^2}$ thì ta có x, y, $z > 0$, $xyz = 1$, và BĐT trên trở thành

$$\frac{1}{\sqrt{1+8x}} + \frac{1}{\sqrt{1+8y}} + \frac{1}{\sqrt{1+8z}} \geqslant 1,$$

tương đương

$$\sqrt{(1+8x)(1+8y)} + \sqrt{(1+8y)(1+8z)} + \sqrt{(1+8z)(1+8x)} \geqslant \sqrt{(1+8x)(1+8y)(1+8z)}.$$

Bình phương hai vế, ta được

$$\sum(1+8x)(1+8y) + 2\sqrt{(1+8x)(1+8y)(1+8z)}\sum\sqrt{1+8x} \geqslant (1+8x)(1+8y)(1+8z).$$

Do $\sum(1+8x)(1+8y) = 3 + 16(x+y+z) + 64(xy+yz+zx)$ và

$$(1+8x)(1+8y)(1+8z) = 1 + 8(x+y+z) + 64(xy+yz+zx) + 512xyz,$$

nên BĐT trên có thể viết lại thành

$$4(x+y+z) + \sqrt{(1+8x)(1+8y)(1+8z)}\left(\sqrt{1+8x} + \sqrt{1+8y} + \sqrt{1+8z}\right) \geqslant 255. \qquad (1)$$

Sử dụng BĐT AM-GM, ta có

$$4(x+y+z) \geqslant 12\sqrt[3]{xyz} = 12,$$

$$\sqrt{\prod(1+8x)} = \sqrt{513 + 8\sum x + 64\sum xy} \geqslant \sqrt{513 + 24\sqrt[3]{xyz} + 192\sqrt[3]{x^2y^2z^2}} = 27$$

và

$$\sqrt{1+8x} + \sqrt{1+8y} + \sqrt{1+8z} \geqslant 3\sqrt[6]{(1+8x)(1+8y)(1+8z)} \geqslant 3\sqrt[6]{729} = 9.$$

Từ đây, dễ dàng suy ra (1). Bài toán được chứng minh xong. □

Nhận xét. Bài toán trên còn có một lời giải khác đơn giản hơn nhiều là sử dụng BĐT Holder.

Ví dụ 38 (ĐH khối A, 2009). *Chứng minh rằng với mọi $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x(x+y+z) = 3yz$, ta có bất đẳng thức sau*

$$(x+y)^3 + (x+z)^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x) \leqslant 5(y+z)^3.$$

Chứng minh. Đặt $a = y+z$, $b = z+x$, $c = x+y$. Khi đó ta có $a, b, c > 0$ và

$$x = \frac{b+c-a}{2}, \quad y = \frac{c+a-b}{2}, \quad z = \frac{a+b-c}{2}.$$

BĐT cần chứng minh trở thành

$$c^3 + b^3 + 3abc \leqslant 5a^3,$$

hay tương đương

$$\frac{b^3}{a^3} + \frac{c^3}{a^3} + 3 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} \leqslant 5.$$

Điều kiện giả thiết có thể viết lại là

$$(b+c-a)(a+b+c) = 3(c+a-b)(a+b-c).$$

Sau khi thu gọn, ta được $b^2 + c^2 - bc = a^2$, hay

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} - \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} = 1.$$

Tới đây, đặt $u = \frac{b}{a}$, $v = \frac{c}{a}$ thì $u, v > 0$ và $u^2 + v^2 - uv = 1$. Như vậy ta phải chứng minh

$$u^3 + v^3 + 3uv \leqslant 5.$$

BĐT này đúng vì ta có $uv \leqslant 1$ và $u^3 + v^3 \leqslant 2$. Thật vậy, từ giả thiết suy ra

$$(u+v)^2 \leqslant (u+v)^2 + 3(u-v)^2 = 4(u^2+v^2-uv) = 4,$$

dẫn đến $u + v \leqslant 2$. Và do đó, ta có

$$u^3 + v^3 = (u+v)(u^2+v^2-uv) = u+v \leqslant 2, \quad uv \leqslant \frac{(u+v)^2}{4} \leqslant 1.$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Ví dụ 39 (Thi vào lớp 10 chuyên ĐHSP Hà Nội, 2008). *Cho x, y, z là các số thực không âm, đôi một khác nhau và thỏa mãn điều kiện $(x+z)(y+z) = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(x+z)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} \geqslant 4.$$

Chứng minh. Đặt $a = x+z$ và $b = y+z$. Khi đó ta có $ab = 1$ và BĐT đã cho trở thành

$$\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geqslant 4.$$

BĐT này tương đương với

$$\frac{1}{a^2+b^2-2} + a^2 + b^2 \geqslant 4,$$

hay

$$\frac{1}{(a^2+b^2-2)} + (a^2+b^2-2) \geqslant 2,$$

hiển nhiên đúng theo AM-GM. □

Ví dụ 40. *Cho x, y, $z \in [0, 2]$ và $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng*

$$3 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 5.$$

Chứng minh. Ta sẽ đổi biến để đưa đoạn $[0, 2]$ về đoạn đối xứng $[-1, 1]$. Muốn vậy, ta đặt $a = x - 1$, $b = y - 1$ và $c = z - 1$. Thế thì a, b, $c \in [-1, 1]$ và $a + b + c = 0$. BĐT cần chứng minh trở thành

$$3 \leqslant (a+1)^2 + (a+1)^2 + (c+1)^2 \leqslant 5,$$

tương đương

$$3 \leqslant a^2 + b^2 + c^2 + 2(a+b+c) + 3 \leqslant 5,$$

hay

$$0 \leqslant a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 2.$$

Từ đây, ta thấy ngay rằng chỉ cần chứng minh vế phải. Vì a, b, $c \in [-1, 1]$ nên

$$a^2 + b^2 + c^2 \leqslant |a| + |b| + |c|.$$

Mặt khác, do $a + b + c = 0$ nên trong ba số ấy phải có hai số cùng không âm hoặc cùng không dương, giả sử đó là a và b. Khi đó $|a| + |b| = |a + b| = |-c| = |c|$. Như vậy

$$a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 2|c| \leqslant 2.$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Ví dụ 41. *Cho các số thực x, y, $z \in [0, 2]$ thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = x^3 + y^3 + z^3 - 3(x-1)(y-1)(z-1).$$

Chứng minh. Đặt $a = x - 1$, $b = y - 1$, $c = z - 1$. Khi đó a, b, $c \in [-1, 1]$, $a + b + c = 0$ và

$$\begin{aligned} P &= (a+1)^3 + (b+1)^3 + (c+1)^3 - 3abc \\ &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + 3(a^2 + b^2 + c^2) + 3(a+b+c) + 3 \\ &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3(a^2 + b^2 + c^2) + 3(a+b+c) + 3 \\ &= 3(a^2 + b^2 + c^2) + 3. \end{aligned}$$

Theo kết quả bài toán trước, ta có

$$0 \leqslant a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 2.$$

Từ đây, dễ dàng tìm được $\min P = 3$ đạt được khi $x = y = z = 1$ và $\max P = 9$ đạt được khi $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$ và các hoán vị. □

Bài tập đề nghị

Bài tập 36. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geqslant 3.$$

Bài tập 37. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = \frac{4a}{b+c-a} + \frac{9b}{c+a-b} + \frac{16c}{a+b-c}.$$

Bài tập 38. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{3a-b+c}+\frac{b}{3b-c+a}+\frac{c}{3c-a+b}\geqslant 1.$$

Bài tập 39 (IMO, 1961). Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có diện tích S thì

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S.$$

Bài tập 40 (IMO, 1964). Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc.$$

Bài tập 41. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$a^2(a+b)(b-c)+b^2(b+c)(c-a)+c^2(c+a)(a-b)\geqslant 0.$$

Bài tập 42 (IMO, 1995). Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Bài tập 43. Cho x, y, $z>0$. Chứng minh rằng

(a) $\dfrac{x+3z}{x+y}+\dfrac{z+3x}{z+y}+\dfrac{4y}{z+x}\geqslant 6;$

(b) $\dfrac{4z-7y}{x+2y}+\dfrac{5x-5z}{y+3z}+\dfrac{3y-11x}{z+4x}\geqslant -3.$

Bài tập 44. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+3abc>c^3.$$

Bài tập 45. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có diện tích S. Chứng minh rằng

(a) $ab+bc+ca\geqslant 4\sqrt{3}S;$

(b) $a+b+c\geqslant 2\sqrt[4]{27}\sqrt{S}.$

Bài tập 46. Cho các số thực a, b thỏa mãn $a+b\geqslant 8$ và $b\geqslant 3$. Chứng minh rằng

$$27a^2+10b^3\geqslant 945.$$

Bài tập 47. Cho các số thực a, b, x, y thỏa mãn

$$x\geqslant a,\quad x+y\geqslant a+b,\quad a\geqslant b>0.$$

Chứng minh rằng

$$x^2+y^2\geqslant a^2+b^2.$$

Bài tập 48. Cho các số thực $x<2$ và $x+y>5$. Chứng minh rằng

$$5x^2+2y^2+8y\geqslant 62.$$

Bài tập 49. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x \leqslant 1$ và $x + y = 3$. Chứng minh rằng

$$x^3 + y^3 \geqslant 9 \quad \text{và} \quad 2x^4 + y^4 \geqslant 18.$$

Bài tập 50. Chứng minh rằng nếu $a \geqslant 4$, $b \geqslant 5$, $c \geqslant 6$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 90$ thì

$$a + b + c \geqslant 16.$$

Bài tập 51. Cho a, b, c là các số thực đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

(a) $\dfrac{a^2}{(b-c)^2} + \dfrac{b^2}{(c-a)^2} + \dfrac{c^2}{(a-b)^2} \geqslant 2$;

(b) $\dfrac{(a+b)^2}{(a-b)^2} + \dfrac{(b+c)^2}{(b-c)^2} + \dfrac{(c+a)^2}{(c-a)^2} \geqslant 2$;

(c) $\dfrac{a^2+b^2}{(a-b)^2} + \dfrac{b^2+c^2}{(b-c)^2} + \dfrac{c^2+a^2}{(c-a)^2} \geqslant \dfrac{5}{2}$;

(d) $\dfrac{ab}{(a-b)^2} + \dfrac{bc}{(b-c)^2} + \dfrac{ca}{(c-a)^2} \geqslant -\dfrac{1}{4}$.

Hướng dẫn. **(a)** Hãy chứng minh $xy + yz + zx = -1$ với $x = \frac{a}{b-c}$, $y = \frac{b}{c-a}$, $z = \frac{c}{a-b}$. Sau đó sử dụng đồng nhất thức $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$.

(b) Làm tương tự như câu (a): Đầu tiên, ta chứng minh $xy + yz + zx = -1$ với $x = \frac{a+b}{a-b}$, $y = \frac{b+c}{b-c}$, $z = \frac{c+a}{c-a}$. Sau đó sử dụng đẳng thức $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$.

(c) Sử dụng kết quả ở câu (b) với chú ý $a^2 + b^2 = \frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{2}$.

(d) Sử dụng kết quả ở câu (b) với chú ý $ab = \frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}$.

Bài tập 52 (IMO, 2008)**.** Chứng minh rằng nếu x, y, z là các số thực khác 1 và $xyz = 1$ thì

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geqslant 1.$$

Hướng dẫn. Đặt $a = \frac{x}{x-1}$, $b = \frac{y}{y-1}$, $c = \frac{z}{z-1}$, rồi tìm sự liên hệ của a, b, c. Sau đó sử dụng các hằng đẳng thức quen thuộc.

Bài tập 53 (Thi vào lớp 10 chuyên Toán-Tin, ĐHKHTN Hà Nội, 2009)**.** Cho x, y, $z \in [0, 2]$ và $x + y + z = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^4 + y^4 + z^4 - 12(x-1)(y-1)(z-1).$$

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Vũ Lương (Chủ biên), *Một số bài giảng và đề thi môn toán*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2009.

[2] Tuyển tập các kết quả nghiên cứu của học sinh chuyên Toán-Tin trường THPT Chuyên KHTN, *Tìm tòi và sáng tạo*, 2009.

[3] Tuyển tập các kết quả nghiên cứu của học sinh chuyên Toán-Tin trường THPT Chuyên KHTN, *Tìm tòi và sáng tạo*, 2010.

[4] *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

[5] Titu Andreescu, Vasile Cirtoaje, Gabriel Dospinescu, Mircea Lascu, *Old and New Inequalities*, GIL Publishing House, 2004.

ĐƯỜNG ĐẲNG GIÁC, ĐƯỜNG ĐỐI TRUNG

Nguyễn Tăng Vũ[1]

1 Đường đẳng giác

1.1 Định nghĩa

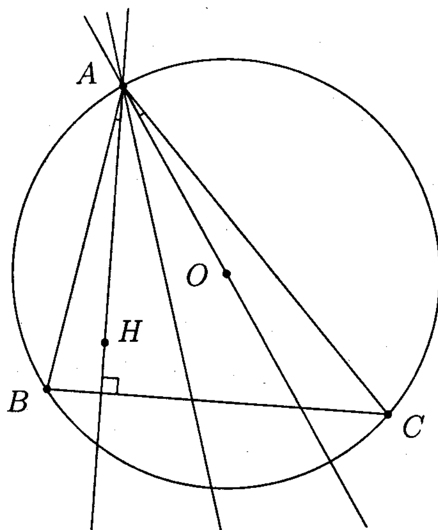
Định nghĩa 1. *Cho góc $\angle xOy$. Ta nói hai đường thẳng d_1 và d_2 là các đường đẳng giác trong góc đã cho nếu chúng cùng đi qua đỉnh O và đối xứng với nhau qua phân giác của góc đó.*

Ví dụ 1.

(a) *Một trường hợp tầm thường là: Đường phân giác là đẳng giác với chính nó.*

(b) *Trong một tam giác vuông, đường cao và trung tuyến xuất phát từ đỉnh góc vuông là hai đường đẳng giác.*

(c) *Tổng quát hơn, nếu tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) thì AO và đường cao hạ từ đỉnh A xuống cạnh BC là hai đường đẳng giác của góc $\angle BAC$.*



Bạn đọc có thể kiểm tra một cách dễ dàng các ví dụ trên.

1.2 Các tính chất cơ bản

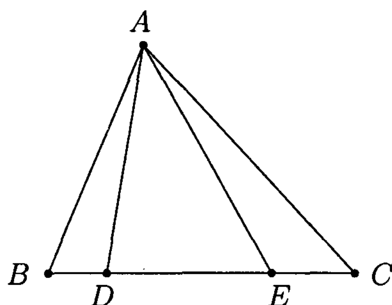
1.2.1 Tiêu chuẩn để hai đường thẳng là đẳng giác của một góc

Định lý 1 (Định lý Steiner). *Cho tam giác ABC và hai điểm D, E trên cạnh BC. Khi đó, AD và AE là hai đường đẳng giác của góc $\angle BAC$ khi và chỉ khi*

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{AB^2}{AC^2}. \tag{1}$$

[1]Giáo viên trường Phổ thông Năng khiếu, Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh.

Chứng minh.



(a) *Phần thuận.* Giả sử AD và AE là hai đường đẳng giác của góc $\angle BAC$, ta sẽ chứng minh đẳng thức (1) cũng được thỏa mãn. Ta có

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{S_{BAD}}{S_{DAC}} = \frac{AD \cdot AB \cdot \sin\angle BAD}{AD \cdot AC \cdot \sin\angle DAC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle DAC}. \tag{2}$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin\angle BAE}{\sin\angle EAC}. \tag{3}$$

Mặt khác, do AD, AE là hai đường đẳng giác của góc $\angle BAC$ nên

$$\angle BAD = \angle EAC, \quad \angle DAC = \angle BAE. \tag{4}$$

Từ đây kết hợp với (2) và (3), ta thu được ngay đẳng thức (1).

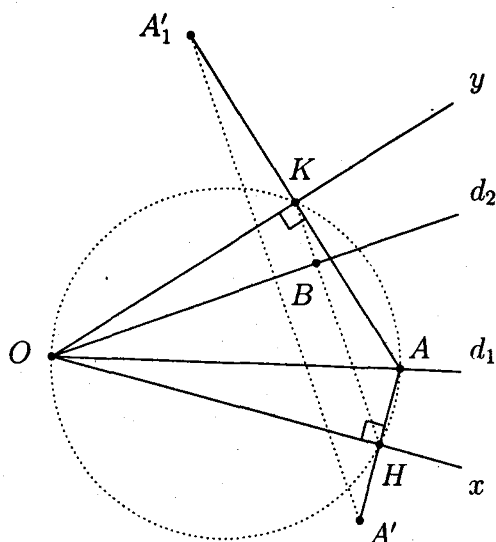
(b) *Phần đảo.* Giả sử AD, AE thỏa (1), ta chứng minh AD và AE là hai đường đẳng giác ứng với góc A. Vẽ AD' là đường đẳng giác của AE ($D' \in BC$). Khi đó ta có hệ thức

$$\frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}} \cdot \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

Kết hợp với (1), ta có $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}}$. Suy ra $D \equiv D'$, tức AD và AE là hai đường đẳng giác. □

Định lý 2. *Cho góc $\angle xOy$ và đường thẳng d_1 qua O, A là một điểm bất kỳ trên d_1. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên Ox, Oy. Khi đó, đường thẳng d_2 là đường đẳng giác của d_1 ứng với góc $\angle xOy$ khi và chỉ khi d_2 qua O và vuông góc với HK.*

Chứng minh. Chứng minh định lý này khá đơn giản, để thuận tiện ta sử dụng góc hình học.



(a) *Phần thuận.* Giả sử d_2 là đường đẳng giác của d_1, ta sẽ chứng minh $d_2 \perp HK$. Ta có $OHAK$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính OA nên

$$\angle AOH = \angle AKH.$$

Mặt khác, ta lại có $\angle KOB = \angle AOH$, nên từ trên suy ra

$$\angle KOB = \angle AKH.$$

Vì $\angle AKH + \angle HKO = 90°$ nên ta có $\angle KOB + \angle HKO = 90°$, từ đó suy ra $OB \perp HK$.

(b) *Phần đảo.* Giả sử d_2 đi qua O và vuông góc với KH, ta sẽ chứng minh d_2 là đường đẳng giác của d_1. Gọi đường thẳng d' là đường đẳng giác của d_1 ứng với góc $\angle xOy$. Theo phần thuận ta có $d' \perp HK$, suy ra d' trùng d_2. Vậy d_2 là đường đẳng giác của d_1. □

Hệ quả 1. *Gọi A_1, A_2 lần lượt là điểm đối xứng của A qua Ox và Oy. Khi đó, đường trung trực của đoạn A_1A_2 là đường đẳng giác của OA.*

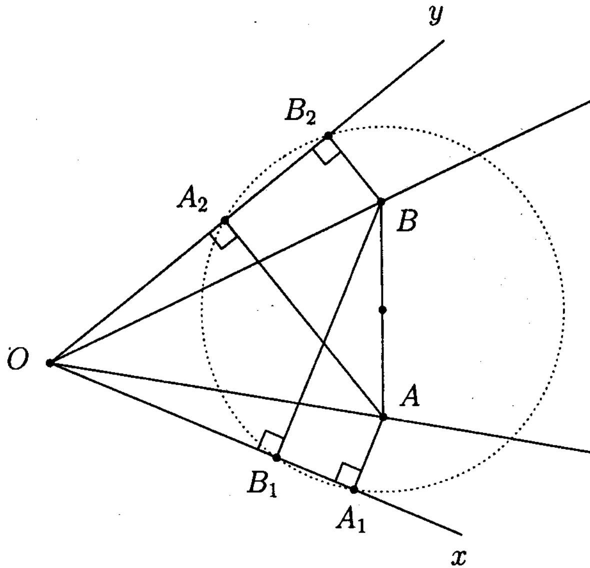
1.2.2 Các tính chất cơ bản

Định lý 3. *Cho góc $\angle xOy$. A và B là hai điểm sao cho OA, OB là hai đường đẳng giác ứng với góc $\angle xOy$. A_1, A_2 lần lượt là hình chiếu của A trên Ox, Oy và B_1, B_2 lần lượt là hình chiếu của B trên Ox, Oy. Khi đó, ta có các điều sau:*

(*a*) *Bốn điểm A_1, A_2, B_1, B_2 cùng nằm trên một đường tròn có tâm là trung điểm của AB;*

(*b*) $AA_1 \cdot BB_1 = AA_2 \cdot BB_2$.

Chứng minh.



(a) Ta có

$$OA_1 = OA\cos\angle AOA_1, \quad OB_1 = OB\cos\angle BOB_1$$

và

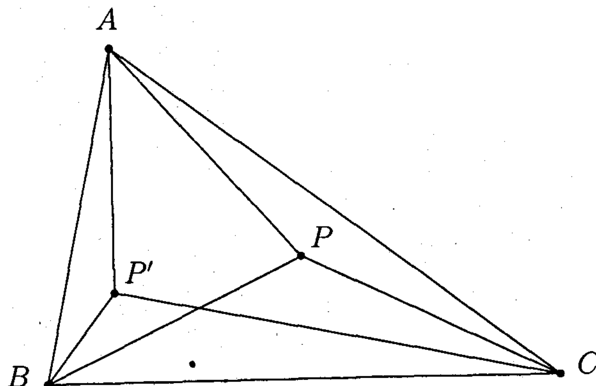
$$OA_2 = OA\cos\angle AOA_2, \quad OB_2 = OB\cos\angle BOB_2.$$

Suy ra $OA_1 \cdot OB_1 = OA_2 \cdot OB_2$. Do đó, bốn điểm A_1, A_2, B_1 và B_2 cùng thuộc một đường tròn. Hơn nữa tâm của đường tròn này chính là trung điểm của AB.

(b) Kết quả này được suy ra trực tiếp từ định nghĩa đường đẳng giác. □

Định lý 4. *Cho tam giác ABC. Các cặp đường thẳng d_a, d'_a là đường đẳng giác ứng với góc A. định nghĩa tương tự với d_b, d'_b và d_c, d'_c. Khi đó, d_a, d_b, d_c đồng quy tại P khi và chỉ khi d'_a, d'_b, d'_c đồng quy tại P'.*

Chứng minh.



Sử dụng định lý Ceva dạng lượng giác ta chứng minh định lý 4 như sau: Giả sử d_a, d_b, d_c đồng quy tại P. ta có

$$\frac{\sin(d_a, c)}{\sin(d_a, b)} \cdot \frac{\sin(d_b, a)}{\sin(d_b, c)} \cdot \frac{\sin(d_c, b)}{\sin(d_c, a)} = -1.$$

Lại có $(d_a, c) = -(d'_a, b)$. và $(d_a, b) = -(d'_a, c)$ nên

$$\frac{\sin(d_a, c)}{\sin(d_a, b)} = \frac{\sin(d'_a, b)}{\sin(d'_a, c)}.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{\sin(d_b, a)}{\sin(d_b, c)} = \frac{\sin(d'_b, c)}{\sin(d'_b, a)}, \quad \frac{\sin(d_c, b)}{\sin(d_c, a)} = \frac{\sin(d'_c, a)}{\sin(d'_c, b)}.$$

Từ những kết quả này, ta suy ra

$$\frac{\sin(d'_a, b)}{\sin(d'_a, c)} \cdot \frac{\sin(d'_b, c)}{\sin(d'_b, a)} \cdot \frac{\sin(d'_c, a)}{\sin(d'_c, b)} = -1.$$

Do đó d'_a, d'_b, d'_c đồng quy. Định lý được chứng minh. □

Từ định lý 4, ta có định nghĩa sau:

Định nghĩa 2. *Hai điểm được gọi là hai điểm đẳng giác nếu các cặp đường thẳng nối chúng với mỗi đỉnh là những cặp đường đẳng giác.*

Ví dụ 2. *Trong một tam giác thì tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm là hai điểm đẳng giác.*

Áp dụng định lý 3 ta có định lý sau:

Định lý 5. *Cho P và P' là hai điểm đẳng giác đối với tam giác ABC. Gọi X, Y, Z lần lượt là các hình chiếu của P trên các cạnh BC, AC, AB và X', Y', Z' lần lượt là các hình chiếu của P' trên các cạnh BC, AC, AB. Khi đó, sáu điểm X, Y, Z, X', Y', Z' cùng nằm trên một đường tròn.*

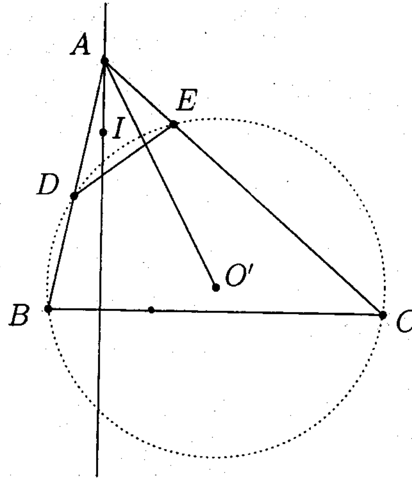
Một hệ quả của định lý 5 là định lý về đường tròn Euler:

Định lý 6. *Trong một tam giác, chân các đường cao và trung điểm các cạnh thì cùng thuộc một đường tròn, tâm đường tròn Euler chính là trung điểm của đoạn thẳng nối trực tâm và tâm ngoại tiếp tam giác.*

1.3 Một số bài toán áp dụng

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC. Đường tròn thay đổi qua B và C cắt các đường thẳng AB và AC tại D và E. Chứng minh rằng tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE di chuyển trên một đường thẳng cố định.*

Chứng minh.



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có tam giác ADE và tam giác ACB đồng dạng, suy ra hai tam giác AID và AOC đồng dạng, do đó $\angle DAI = \angle OAC$. Kết quả này cho thấy AI và AO là hai đường đẳng giác đối với góc A. Mà đường cao AH của tam giác ABC và AO cũng là hai đường đẳng giác. Từ đây suy ra $I \in AH$ cố định. □

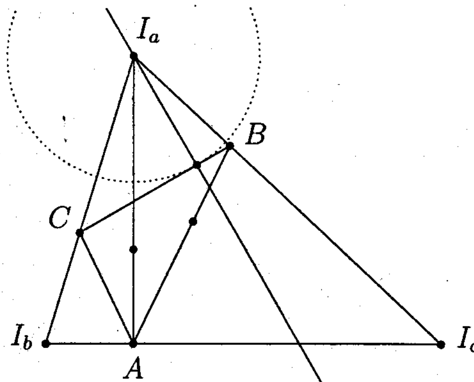
Nhận xét. Đây là bài toán thi vào trường Phổ thông Năng khiếu năm 2011 và là một bài toán khá dễ. Ta không cần phải sử dụng tới khái niệm đẳng giác. Tuy nhiên, qua bài này ta có một dấu hiện để nhận biết được hai đường đẳng giác: *Cho hai điểm D, E thuộc các đường thẳng AB và AC sao cho $\triangle ADE \sim \triangle ACB$. Khi đó các đường thẳng tương ứng của hai tam giác ADE và ABC qua A là hai đường đẳng giác của góc $\angle BAC$.*[2]

Cụ thể hơn: *Cho tam giác ABC. Nếu DE là đường đối song của BC thì trung tuyến (đường cao...) xuất phát từ A của tam giác ADE và tam giác ABC là hai đường đẳng giác.*

Đây là một ý khá hay để ta giải được các bài toán. Ta xét ví dụ sau:

Bài toán 2. *Chứng minh rằng trong một tam giác, các đường thẳng kẻ từ tâm của đường tròn bàng tiếp trong mỗi góc, vuông góc với cạnh đối diện, đồng quy tại một điểm.*

Chứng minh.

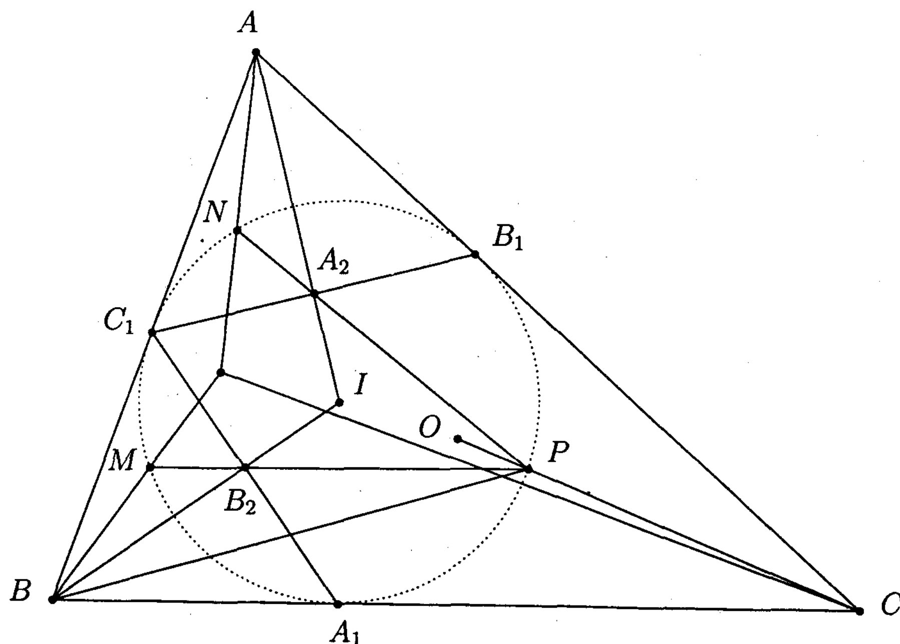


[2]DE và BC được gọi là hai đường đối song.

Gọi I_a, I_b, I_c lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp ứng với đỉnh A, B, C. Dễ dàng chứng minh I_aA, I_bB, I_cC là các đường cao của tam giác $I_aI_bI_c$. Vì BC và I_aI_b là hai đường đối song nên theo tích chất trên ta có đường thẳng qua A vuông góc với BC và đường thẳng I_aA là hai đường đẳng giác ứng với góc $I_bI_aI_c$. Áp dụng định lý 4, ta có điều cần chứng minh. □

Bài toán 3 (Nga, 2010). *Đường tròn nội tiếp của tam giác nhọn ABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC, AC lần lượt tại C_1, A_1, B_1. Các điểm A_2, B_2 lần lượt là trung điểm của các đoạn B_1C_1, A_1C_1. Gọi P là giao điểm của đường tròn nội tiếp và CO, với O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi N, M là giao điểm thứ hai của PA_2, PB_2 với đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng giao điểm của AN và BM thuộc đường cao hạ từ C của tam giác ABC.*

Chứng minh.



Ta biết rằng đường cao hạ từ C và CO là hai đường đẳng giác. Các đường thẳng CO, BP, AP cắt nhau tại P. Do vậy, ta chỉ cần chứng minh (AP, AN) và (AP, AM) là các cặp đường đẳng giác ứng với góc A và B của tam giác ABC.

Từ đây, ta đi đến lời giải cho bài toán này như sau: Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, K là giao điểm của AN và BM. Áp dụng phương tích của điểm P đối với đường tròn (I) và đường tròn ngoại tiếp tứ giác AC_1IB_1, ta có

$$\overline{A_2I} \cdot \overline{A_2A} = \overline{A_2C_1} \cdot \overline{A_2B_1}, \quad \overline{A_2C_1} \cdot \overline{A_2B_1} = \overline{A_2N} \cdot \overline{A_2P}.$$

Từ đó suy ra

$$\overline{A_2N} \cdot \overline{A_2P} = \overline{A_2I} \cdot \overline{A_2A}.$$

Đẳng thức này cho thấy $ANIP$ là tứ giác nội tiếp. Hơn nữa $IN = IP$ nên ta có AI là phân giác góc $\angle NAP$, do đó AN và AP là hai đường đẳng giác ứng với góc A.

Chứng minh tương tự ta cũng có BM và BP là hai đường đẳng giác của góc B. Mà AP, BP, CO đồng quy tại I và AN, BM cắt nhau tại K, nên CK là đường đẳng giác của CO. Suy ra K thuộc đường cao hạ từ C của tam giác ABC. □

2 Đường đối trung

2.1 Định nghĩa

Định nghĩa 3. *Trong một tam giác, đường đẳng giác với trung tuyến xuất phát từ một đỉnh được gọi là đường đối trung của tam giác.*

Ví dụ 3. *Trong một tam giác vuông thì đường cao xuất phát từ đỉnh chính là đường đối trung.*

2.2 Các tính chất cơ bản

Đường đối trung là đường đẳng giác với trung tuyến nên sẽ có các tính chất của cặp đường đẳng giác. Từ các định lý 1, 2, 3, 4 và 5, ta có các tính chất sau:

(1) Cho tam giác ABC. Ta có AD ($D \in BC$) là đường đối trung khi và chỉ khi:

(a) $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$;

(b) $\dfrac{\sin \angle DAB}{\sin \angle DAC} = \dfrac{AB}{AC}$;

(c) $\dfrac{DH}{DK} = \dfrac{AB}{AC}$ (H, K lần lượt là hình chiếu của D trên AB, AC).

(2) Các đường đối trung giao nhau tại một điểm gọi là điểm Lemoine. Chú ý rằng:

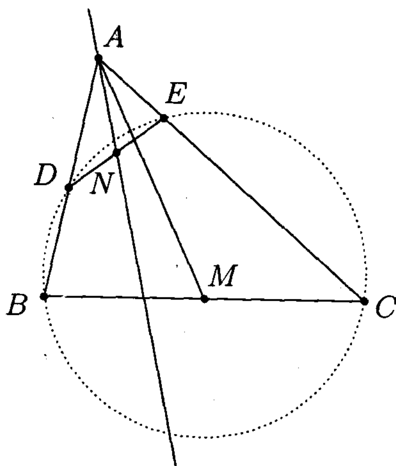
(a) Điểm Lemoine và trọng tâm là hai điểm đẳng giác;

(b) Điểm Lemoine có nhiều tính chất hay, ta sẽ xét các tính chất đó trong phần bài tập.

2.3 Cách dựng đường đối trung và áp dụng

Dựa vào các tính chất của đường đối trung, trong phần này ta sẽ xét xét các cách dựng đường đối trung. Qua đó, ta xem xét một vài ví dụ liên quan tới đường đối trung của tam giác.

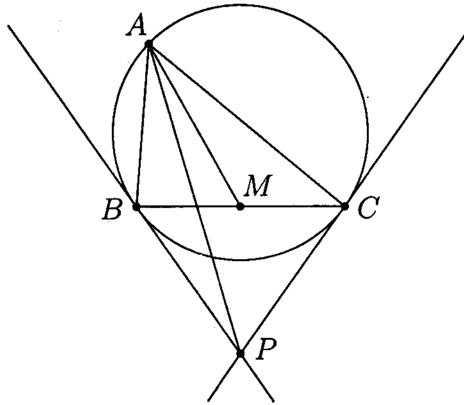
Bài toán 4. *Cho tam giác ABC. Trên đường thẳng AB lấy một điểm D và trên đường thẳng AC lấy một điểm E sao cho DE là đường đối song của BC. Chứng minh rằng trung tuyến của tam giác ADE là đường đối trung của tam giác ABC.*



Bài toán này có thể được chứng minh dựa vào nhận xét sau bài toán 1.

Bài toán 5. *Cho tam giác ABC. Tiếp tuyến tại B và C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt nhau tại P. Chứng minh rằng AP là đường đối trung của tam giác ABC.*

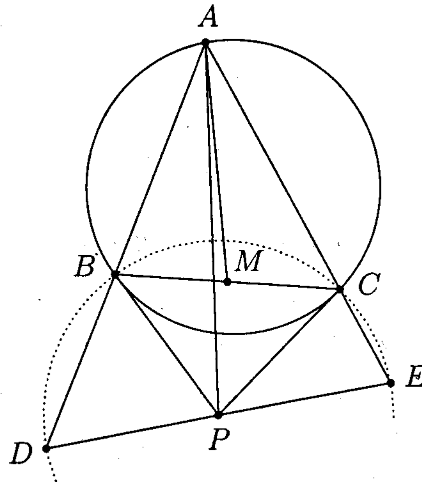
Chứng minh.



(a) *Cách 1.* Gọi D là giao điểm của AP và BC, ta có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{S_{ABP}}{S_{ACP}} = \frac{AB \cdot BP \cdot \sin\angle ABP}{AC \cdot CP \cdot \sin\angle ACP} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin\angle ACB}{\sin\angle ABC} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

Do đó AP là đường đối trung của tam giác ABC.



(b) *Cách 2.* Gọi D, E là giao điểm của AB, AC với đường tròn tâm P bán kính PB và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta cần chứng minh DE là đường kính của đường tròn. Thật vậy ta có

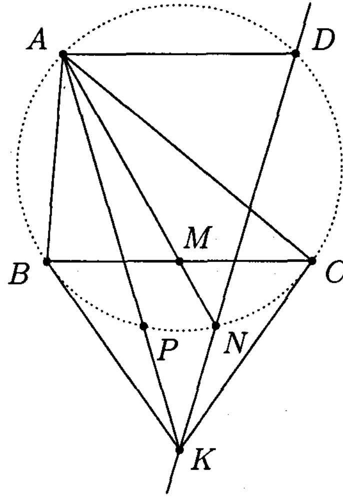
$$\angle DBE = \angle BAE + \angle AEB = \frac{\angle BOC}{2} + \frac{\angle BPC}{2} = 90°,$$

nên DE là đường kính và P là trung điểm của DE. Từ đây, dễ dàng suy ra AP là đường đối trung của tam giác ABC. □

Sau đây ta xét một vài ví dụ có liên quan đến đường đối trung.

Bài toán 6 (Đề chọn đội tuyển trường Phổ thông Năng khiếu, 2010). *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có A cố định và B, C thay đổi trên (O) sao cho BC luôn song song với một đường thẳng cố định. Các tiếp tuyến của (O) tại B và C cắt nhau tại K. Gọi M là trung điểm của BC, N là giao điểm của AM với (O). Chứng minh đường thẳng KN luôn qua một điểm cố định.*

Chứng minh.



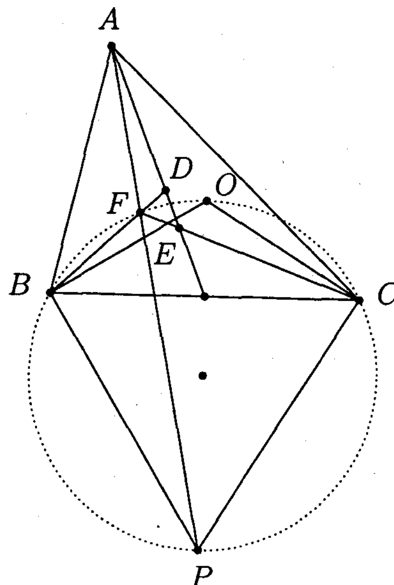
Gọi D, P lần lượt là giao điểm của KN, KA và (O). Vì BC có phương không đổi nên KM là đường thẳng cố định. Theo trên, ta thấy AK là đường đối trung, suy ra $\angle BAP = \angle NAC$. Từ đó ta chứng minh được P, N đối xứng nhau qua đường thẳng KM cố định. Khi đó dễ dàng suy ra D đối xứng với A qua đường thẳng KM nên D cố định. □

Bài toán 7. *Cho tam giác ABC. Một đường tròn thay đổi qua BC cắt các cạnh AB và AC tại D và E. Tiếp tuyến tại D và E của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt nhau tại P. Chứng minh rằng P luôn thuộc một đường thẳng cố định.*

Chứng minh. Nhận xét P thuộc đường đối trung của tam giác ADE. Mà BC là đường đối song của DE nên trung tuyến AM của tam giác ABC là đường đối trung của tam giác ADE. Do đó P thuộc AM cố định. □

Bài toán 8. *Cho tam giác ABC nhọn khác tam giác cân. M là trung điểm của BC. D và E là các điểm thuộc AM sao cho $AD = BD$ và $AE = EC$. DB cắt CE tại F. Một đường tròn qua B và C cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại H và K. Chứng minh rằng AF đi qua trung điểm của HK.*

Chứng minh.



Ta thấy rằng HK là đường đối song của BC nên để chứng minh AF qua trung điểm của HK thì ta chỉ cần chứng minh AF là đường đối trung của tam giác ABC. Áp dụng định lý sine cho tam giác ABF và tam giác ACF, ta có

$$\frac{AB}{AF} = \frac{\sin \angle AFB}{\sin \angle ABF} = \frac{\sin \angle AFB}{\sin \angle BAD} \tag{1}$$

và

$$\frac{AC}{AF} = \frac{\sin \angle AFC}{\sin \angle ACF} = \frac{\sin \angle AFC}{\sin \angle EAC}. \tag{2}$$

Mà D, E thuộc trung tuyến AM nên ta có

$$\frac{\sin \angle DAB}{\sin \angle EAC} = \frac{AC}{AB}. \tag{3}$$

Từ (1), (2) và (3), ta suy ra $\sin \angle AFB = \sin \angle AFC$, tức

$$\angle AFB = \angle AFC. \tag{4}$$

Mặt khác ta lại có

$$\angle BFC = \angle FDE + \angle FED = 2\angle BAD + 2\angle EAC = 2\angle BAC = \angle BOC.$$

Kết hợp với trên, ta được

$$\angle AFB = \angle AFC = 180° - \angle BAC.$$

Như vậy, ta có

$$\angle FAC + \angle FCA = \angle BAC = \angle BAD + \angle CAD.$$

Mà $\angle FCA = \angle CAD$ nên $\angle FAC = \angle BAD$. Vậy AF là đường đối trung của tam giác ABC. Từ đó suy ra điều cần chứng minh. □

Nhận xét. Sau khi đã chỉ ra được $\angle BFC = \angle BOC$ thì ngoài cách chứng minh như trên, ta còn có một cách khác để hoàn tất bài toán như sau: Từ $\angle BFC = \angle BOC$, ta có tứ giác $BFOC$ nội tiếp. Gọi P là giao điểm của AF và $(BFOC)$. Từ (4) suy ra $PB = PC$. Điều này chứng tỏ OP là đường kính và $PB \perp OB$, $PC \perp OC$. Suy ra PB, PC là tiếp tuyến của (ABC) và như thế, AP là đường đối trung của tam giác ABC. Từ đây ta có ngay điều phải chứng minh.

Qua cách chứng minh này, ta thấy $OF \perp AF$ và F thuộc đường tròn đường kính AO. Đây chính là nội dung của bài toán thi Olympic Toán toàn nước Mỹ năm 2008: *Cho tam giác ABC nhọn và không phải tam giác cân, đường trung trực của AB và AC cắt trung tuyến AM tại D và E. F là giao điểm của BD và CE. Gọi N, P lần lượt là trung điểm AB, AC và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng bốn điểm N, F, O, P cùng nằm trên một đường tròn.*

3 Bài tập tự luyện

Bài tập 1. Cho tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi O_a, O_b, O_c lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác OBC, OAC và OAB. Chứng minh rằng AO_a, BO_b, CO_c đồng quy tại điểm K_0 và K_0 là điểm đẳng giác của tâm đường tròn Euler của tam giác ABC. (K_0 được gọi là điểm Kosnita.)

Bài tập 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm sao cho PB, PC là các tiếp tuyến với đường tròn (O). Trên AB và AC ta lấy các điểm K và H sao cho $PK \parallel AC$ và $PH \parallel AB$. Chứng minh rằng các điểm H, K và trung điểm các cạnh AB, AC cùng nằm trên một đường tròn.

Bài tập 3 (APMO, 2010). Cho tam giác ABC nhọn thỏa điều kiện $AB > BC$, $AC > BC$. Gọi H và O lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác AHC cắt đường thẳng AB tại điểm M khác A, và đường tròn ngoại tiếp tam giác AHB cắt đường thẳng AC tại điểm N khác A. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNH thuộc đường thẳng OH.

Bài tập 4. Cho tam giác ABC cân tại A, và P là một điểm nằm trong tam giác sao cho $\angle PBA = \angle PCB$. Gọi M là trung điểm của BC, chứng minh rằng

$$\angle APC + \angle MPB = 180°.$$

Bài tập 5. Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B cố định trên đường tròn, M là trung điểm của AB. Điểm C thay đổi trên cung lớn AB. Đường trung trực của AC và BC cắt CM lần lượt tại D và E. Gọi F là giao điểm của AD và BE. Chứng minh rằng CF luôn đi qua một điểm cố định khi C thay đổi.

Bài tập 6 (Nga, 2010). Một điểm B thay đổi trên dây AC của đường tròn (ω). Đường tròn đường kính AB và BC có tâm là O_1 và O_2 cắt (ω) lần lượt tại D và E. Tia O_1D và O_2E cắt nhau tại F, tia AD và CE cắt nhau tại G. Chứng minh rằng FG đi qua trung điểm của AC.

Bài tập 7. Cho tam giác ABC. Một đường thẳng (d) thay đổi luôn song song với BC cắt AB và AC lần lượt tại M, N. Gọi I là giao điểm của BN và CM. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BIM và CIN cắt nhau tại P (khác I). Chứng minh rằng P luôn thuộc một đường thẳng cố định khi (d) thay đổi.

4 Lời kết

Bài viết này không đi sâu nghiên cứu các tính chất của đường đẳng giác, điểm đẳng giác, mà chỉ nêu lên một khái niệm khá phổ biến trong hình học nhưng có thể còn lạ lẫm với nhiều học sinh, qua đó giúp cho các em có thêm một hướng nhìn khi giải các bài toán hình học. Bạn nào yêu thích có thể nghiên cứu thêm trong các tài liệu tham khảo.

Tài liệu tham khảo

[1] Hoàng Chúng (chủ biên), *Hình học của tam giác*, Nhà xuất bản Giáo dục, 1996.

[2] Đỗ Thanh Sơn, *Một số chuyên đề hình học phẳng bồi dưỡng học sinh giỏi THPT*, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2010.

[3] Roger A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover Publications, 1964.

[4] Darij Grinberg, *Isogonal Conjugation with Respect to a Triangle*, Unpublished notes, 2006. [ONLINE: `http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/geometry2.html`]

[5] Lê Bá Khánh Trình, *Hình học tĩnh và động*, Hội thảo các vấn đề dạy và học Toán ở trường phổ thông, 2008.

[6] `http://www.geometry.ru`.

SỰ KẾT HỢP GIỮA HÌNH HỌC VÀ ĐẠI SỐ TRONG CÁC BÀI TOÁN VỀ PHÂN GIÁC

Lê Phúc Lữ[1]

Các bài toán về đường phân giác cũng như mọi bài toán về Hình học phẳng khác, đều được giải với những phương pháp, định lý, bổ đề khác nhau và đều đòi hỏi một tư duy hình tượng ở người làm Toán ở mức độ nhất định. Chẳng hạn như hàng điểm điều hòa liên quan chặt chẽ với các bài toán về phân giác nhưng nó cũng được dùng để giải nhiều bài toán hình phẳng nói chung, các phép biến hình hay biến đổi vector cũng tương tự thế. Tuy nhiên, do những đặc trưng riêng mà những bài toán về phân giác thường mang một vẻ đẹp khác biệt và độc đáo cũng như những kết quả bất ngờ.

Trong nội dung của bài viết này, chúng ta sẽ cùng tìm hiểu một khía cạnh nhỏ trong vấn đề liên quan đến bài toán về đường phân giác trong tam giác. Đó chính là sự kết hợp giữa yếu tố Hình học và Đại số trong lời giải một bài toán như thế. Có thể nói rằng công cụ Đại số cũng chính là một giải pháp hữu hiệu cho những bạn chưa có được kỹ năng tiếp cận và phân tích tốt đối với các bài toán Hình phẳng để làm quen dần dần.

Ở chương trình THPT, theo những công thức về Hình học Giải tích cơ bản thì việc xác định phương trình đường phân giác hay tọa độ tâm đường tròn nội tiếp của một tam giác là những điều không đơn giản nhưng không vì thế mà việc vận dụng công cụ Đại số cho những bài toán này gặp quá nhiều khó khăn. Trên thực tế, khoảng cách giữa chân các đường phân giác đến các đỉnh thuộc cạnh đối diện hay những công thức biểu diễn độ dài các đoạn thẳng tương tự lại tính được rất dễ dàng và đó chính là một ưu điểm cho việc ứng dụng đại số vào các bài toán này. Nhiều khi sự kết hợp giữa Hình học thuần túy và Đại số vào các bài toán về phân giác lại mang đến nhiều kết quả rất đẹp mắt và có giá trị.

Hãy cùng tìm hiểu những bài toán, những ví dụ dưới đây để làm rõ điều đó và mong rằng mỗi người sẽ rút ra được những kinh nghiệm cần thiết, mới mẻ và bổ ích cho mình!

1 Một số kết quả cần nhớ

1.1 Một số định lý và bổ đề cơ bản

(a) Cho tam giác ABC có phân giác trong AD phân giác ngoài AE (D, $E \in BC$). Khi đó

$$\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}.$$

Các điểm E, B, D, C lập thành một hàng điểm điều hòa. Đường tròn đường kính DE gọi là đường tròn Appolonius-A.

(b) Cho $\triangle ABC$ và một điểm P nằm trong tam giác. Các đường thẳng AP, BP, CP theo thứ tự cắt các cạnh đối tại D, E, F. Khi đó, $\triangle DEF$ được gọi là tam giác cevian của $\triangle ABC$ và $\triangle ABC$ được gọi là tam giác anticevian của $\triangle DEF$.

[1]Trường Đại học FPT, thành phố Hồ Chí Minh.

(c) Vết của điểm X trên cạnh BC của tam giác ABC là giao điểm của hai đường thẳng AX với đường thẳng BC.

(d) Cho điểm P và tam giác ABC. Khi đó, giao điểm của các đường thẳng PA, PB, PC qua các phân giác trong tương ứng đồng quy tại điểm P'. Điểm này được gọi là điểm liên hợp đẳng giác với điểm P.

(e) Cho tam giác ABC nhọn có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, p là nửa chu vi. Gọi H, D lần lượt là chân đường cao, chân đường phân giác trong góc A. Ta có các công thức cơ bản:

- $DB = \dfrac{ac}{b+c}$, $DC = \dfrac{ab}{b+c}$;
- $BH = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}$, $CH = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}$;
- $AD = \dfrac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$.

1.2 Hệ tọa độ tỉ cự

1.2.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1. *Trong mặt phẳng cho trước tam giác ABC không suy biến, mỗi điểm P thỏa mãn đẳng thức vector*

$$x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}, \quad x^2+y^2+z^2 \neq 0$$

có tọa độ là $P(x, y, z)$ và đây chính là tọa độ tỉ cự của P đối với tam giác ABC.

Hệ tọa độ tỉ cự là cách để xây dựng nên nhiều hệ thống điểm và trên cơ sở đó tìm ra những tính chất, quan hệ mới. Đây cũng là một công cụ mạnh để giải nhiều bài toán Hình học phẳng.

1.2.2 Các công thức cơ bản

(a) Với mỗi điểm M bất kỳ, ta có

$$S_{[MBC]} \cdot \overrightarrow{MA} + S_{[MCA]} \cdot \overrightarrow{MB} + S_{[MAB]} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0},$$

nên $M(S_{[MBC]}, S_{[MCA]}, S_{[MAB]})$ là tọa độ tỉ cự của M (trong đó $S_{[XYZ]}$ là diện tích đại số của tam giác XYZ).

(b) Tọa độ tỉ cự của một số điểm quen thuộc là (các điểm dưới đây theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp, trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm tam giác ABC)

$$I(a, b, c), \quad G(1, 1, 1), \quad O(a^2S_a, b^2S_b, c^2S_c), \quad H\left(\frac{1}{S_a}, \frac{1}{S_b}, \frac{1}{S_c}\right),$$

trong đó S_a, S_b, S_c lần lượt là các đại lượng $\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$, $\frac{c^2+a^2-b^2}{2}$, $\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$.

(c) Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $P(a_1, b_1, c_1)$ và $Q(a_2, b_2, c_2)$ được xác định bởi $D_ax + D_by + D_cz = 0$, trong đó

$$D_a = b_1c_2 - b_2c_1, \quad D_b = c_1a_2 - c_2a_1, \quad D_c = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Nó còn được viết dưới dạng

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

là định thức cấp ba của các đại lượng liên quan. Từ đó suy ra rằng điểm $R(x_1, y_1, z_1)$ nằm trên PQ khi và chỉ khi

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

(d) Giao điểm của hai đường thẳng $a_1x + b_1y + c_1z = 0$ và $a_2x + b_2y + c_2z = 0$ có công thức là $M(b_1c_2 - b_2c_1, c_1a_2 - c_2a_1, a_1b_2 - a_2b_1)$. Từ đó suy ra điều kiện để ba đường thẳng có phương trình $a_ix + b_iy + c_iz = 0$, $i = 1, 2, 3$ đồng quy là

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

(e) Điều kiện để hai đường thẳng $a_1x + b_1y + c_1z = 0, a_2x + b_2y + c_2z = 0$ song song là

$$(a_1 - b_1, b_1 - c_1, c_1 - a_1) = (a_2 - b_2, b_2 - c_2, c_2 - a_2).$$

(f) Trung điểm của đoạn BC là $M(0, 1, -1)$, tiếp điểm của đường tròn nội tiếp lên cạnh BC là $D\left(0, \frac{1}{p-b}, \frac{1}{p-c}\right)$ và tương tự với các cạnh CA, AB.

(g) Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0.$$

(h) Hai điểm $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ liên hợp đẳng giác với nhau khi tồn tại số thực $k \neq 0$ để có các đẳng thức sau

$$x_1x_2 = ka^2, \quad y_1y_2 = kb^2, \quad z_1z_2 = kc^2.$$

1.3 Phương pháp dùng số phức

Số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ được biểu diễn trong mặt phẳng phức Oxy bởi điểm A có tọa độ là $A(a, b)$. Do đó, số phức a đặc trưng cho vị trí của điểm A trong mặt phẳng.

Bằng các biến đổi đại số với số phức, ta có thể xác định được quan hệ giữa các điểm và tìm được tọa độ của những điểm mới dựa trên quan hệ đó. Đây chính là ý tưởng cơ bản để dùng số phức giải các bài toán hình học thông thường.

Trong phần này, ta ký hiệu tương ứng điểm A bởi số phức a, điểm B bởi số phức b, ... Ta có các công thức cơ bản sau:

(a) Biểu diễn điểm và vị trí tương đối các điểm:

- Khoảng cách giữa hai điểm biểu diễn cho hai số phức a, b là $|a - b|$.

- Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \neq -1$ biểu diễn bởi
$$m = \frac{a + kb}{1 + k}.$$
- Hai đường thẳng ab, cd song song khi và chỉ khi
$$\frac{a - b}{\overline{a} - \overline{b}} = \frac{c - d}{\overline{c} - \overline{d}}.$$
- Ba điểm a, b, c thẳng hàng khi và chỉ khi
$$\frac{a - b}{\overline{a} - \overline{b}} = \frac{a - c}{\overline{a} - \overline{c}}.$$
- Hai đường thẳng ab, cd vuông góc khi và chỉ khi
$$\frac{a - b}{\overline{a} - \overline{b}} = -\frac{c - d}{\overline{c} - \overline{d}}.$$

(b) Biểu diễn đường tròn đơn vị và các công thức về điểm đặc biệt trong tam giác:

- Trên đường tròn đơn vị, thì
  - c thuộc về cung ab khi và chỉ khi
$$\overline{c} = \frac{a + b - c}{ab}.$$
  - Tiếp tuyến tại a và b cắt nhau tại điểm có tọa độ là
$$\frac{2ab}{a + b}.$$
  - Giao điểm của hai dây ab và cd là điểm
$$\frac{ab(c + d) - cd(a + b)}{ab - cd}.$$
  - Hình chiếu của một điểm bất kỳ c lên dây ab là
$$h = \frac{1}{2}(a + b + c - ab\overline{c}).$$
- Trọng tâm của tam giác abc là
$$g = \frac{a + b + c}{3}.$$
- Nếu đường tròn nội tiếp tam giác được xem là đường tròn đơn vị và nó tiếp xúc với các cạnh a, b, c lần lượt tại p, q, r thì ta có
$$a = \frac{2qr}{q + r}, \quad b = \frac{2rp}{r + q}, \quad c = \frac{2pq}{p + q}.$$
  - Tâm đường tròn ngoại tiếp o là
$$o = \frac{2pqr(p + q + r)}{(p + q)(q + r)(r + p)}.$$
  - Trực tâm của tam giác là
$$h = \frac{2\left[p^2q^2 + q^2r^2 + r^2p^2 + pqr(p + q + r)\right]}{(p + q)(q + r)(r + p)}.$$

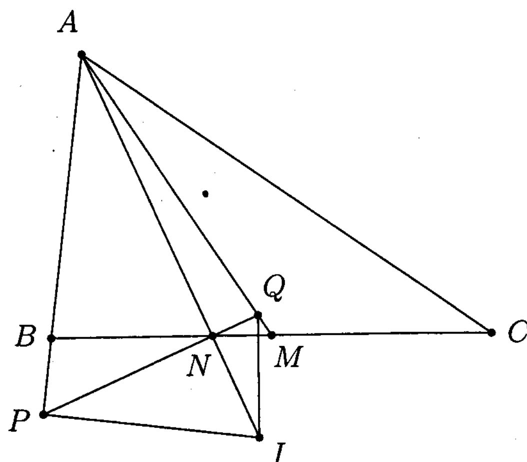
Các công thức này có thể chứng minh hoàn toàn bằng kiến thức Hình học thông thường.

2 Một số phương pháp giải các bài toán liên quan

2.1 Phương pháp tọa độ

Ví dụ 1. *Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm cạnh BC và N là chân đường phân giác của góc A. Đường thẳng vuông góc với NA tại N cắt các đường thẳng AB, AM lần lượt tại P, Q. Gọi I là giao điểm đường vuông góc với AB tại P và AN. Chứng minh rằng $IQ \perp BC$.*

Chứng minh.



Chọn hệ trục toạ độ Oxy sao cho N trùng O và A, I nằm trên trục Ox. Giả sử AB có phương trình là $y = ax + b$ thì ta có $A\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$, $P(0, b)$ và $AC : y = -ax - b$. Do $PI \perp AB$ nên $PI : y = -\frac{1}{a}x + b$ và $I(ab, 0)$. Giả sử phương trình của BC là $y = cx$, thế thì

$$B\left(\frac{b}{c-a}, \frac{bc}{c-a}\right), \quad C\left(-\frac{b}{c+a}, -\frac{bc}{c+a}\right), \quad M\left(\frac{ab}{c^2-a^2}, \frac{abc}{c^2-a^2}\right).$$

Từ đây suy ra

$$\overrightarrow{AM}\left(\frac{bc^2}{a(c^2-a^2)}, \frac{abc}{c^2-a^2}\right),$$

dẫn đến ta có phương trình của AM là $a^2x - cy + ab = 0$ và $Q\left(0, \frac{ab}{c}\right)$. Kết quả này cho ta $\overrightarrow{QI}\left(ab, -\frac{ab}{c}\right)$, và do đó $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{QI} = 0$. Vậy $IQ \perp BC$, ta có điều phải chứng minh. □

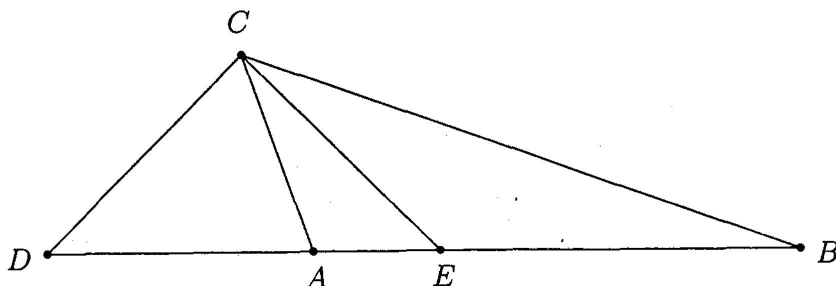
Nhận xét. Đây là một minh họa khá điển hình cho ứng dụng của phương pháp tọa độ. Bằng cách chọn hệ trục tọa độ phù hợp (không nhất thiết phải luôn chọn trục Ox trùng với đường thẳng BC mà chọn ngay tại một góc vuông nào đó trong bài sao cho việc tính toán tọa độ các điểm còn lại thuận lợi nhất). Tuy nhiên, bài toán cũng có thể giải bằng phương pháp Hình học thông thường bằng cách biến đổi góc và nó có thể được phát biểu tổng quát hơn khi thay M là trung điểm BC bằng một điểm bất kỳ trên đường thẳng BC.

Ví dụ 2. *Cho tam giác ABC có phân giác trong và ngoài tại đỉnh C cắt cạnh AB lần lượt tại D và E. Biết rằng $CD = CE$, chứng minh hệ thức sau*

$$AB^2 + AC^2 = 4R^2,$$

trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Chứng minh.



Do $CD = CE$ nên tam giác CDE vuông cân tại C. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O là trung điểm DE và C thuộc trục tung thì

$$A(a, 0), \quad B(b, 0), \quad C(0, c), \quad D(-c, 0), \quad E(c, 0).$$

Theo tính chất đường phân giác, ta có $\frac{DA^2}{DB^2} = \frac{CA^2}{CB^2}$, hay

$$\frac{(a-c)^2}{(b-c)^2} = \frac{a^2+c^2}{b^2+c^2},$$

từ đây suy ra $b = \frac{c^2}{a}$, dẫn đến $B\left(\frac{c^2}{a}, 0\right)$. Từ kết quả này cho ta

$$AB^2 + AC^2 = (a^2+b^2) + (a^2+c^2) = \left(c^2 + \frac{c^4}{a^2}\right) + (a^2+c^2) = \left(\frac{a^2+c^2}{a}\right)^2. \quad (1)$$

Gọi $I(x, y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì ta có

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases}$$

Biến đổi tương đương, ta thu được

$$\begin{cases} -2ax + a^2 = -2 \cdot \dfrac{xc^2}{a} + \dfrac{c^4}{a^2} \\ -2ax + a^2 = -2 \cdot cy + c^2 \end{cases}$$

Giải hệ này, ta được $I\left(\frac{a^2+c^2}{2a}, c\right)$. Do đó

$$4R^2 = 4IC^2 = \left(\frac{a^2+c^2}{a}\right)^2. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AB^2 + AC^2 = 4R^2$. Đó là điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Trong trường hợp chúng ta nắm vững các công thức tính độ dài phân giác trong và ngoài. Ta có thể thu được biểu thức trên nhanh chóng hơn bằng các biến đổi đại số. Chúng ta cũng còn một cách dùng biến đổi lượng giác như sau

Cách 2. Không mất tính tổng quát, giả sử $AB < AC$. Do $AD = AE$ nên tam giác ADE vuông cân tại A, ta được $\frac{1}{2}\angle A + \angle C = 45°$, suy ra

$$\frac{1}{2}\angle A + \angle B = 135°.$$

Mà $\angle A = 180° - \angle B - \angle C$ nên

$$\angle B - \angle C = 90°.$$

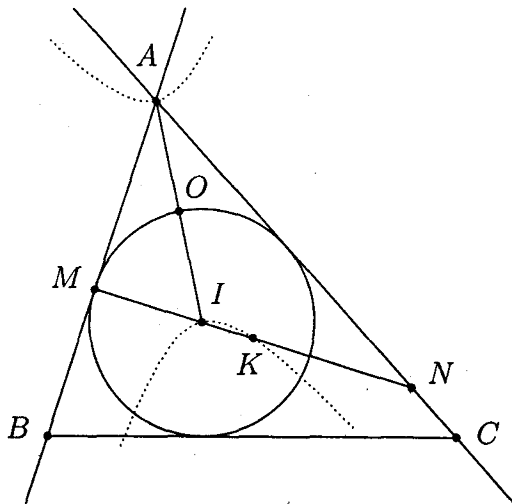
Ta cần chứng minh $\sin^2 B + \sin^2 C = 1$, hay

$$\sin^2 B + \sin^2(B - 90°) = 1.$$

Tuy nhiên, đẳng thức này hiển nhiên đúng. □

Ví dụ 3. *Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp. Hai điểm M, N lần lượt di động trên các đường thẳng AB, AC sao cho MN đi qua I. Chứng minh rằng trung điểm K của MN thuộc một đường cố định khi M thay đổi.*

Chứng minh.



Không mất tính tổng quát, giả sử (I) có bán kính là 1. Chọn gốc tọa độ trùng với I, Ix vuông góc với AI tại I và Iy trùng với AI. Gọi D là chân đường phân giác trong của góc A. Đặt $A(0, a)$ và $D(0, -d)$ với $a, d > 1$. Các đường thẳng AC, AB chính là tiếp tuyến kẻ từ A đến $(I, 1)$. Giả sử tiếp tuyến đó có hệ số góc là k, khi đó phương trình của nó có dạng $y - a = kx$ hay $kx - y + a = 0$. Do khoảng cách từ I đến đường thẳng này là 1 nên $\frac{|k\cdot 0 - 0 + a|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$, suy ra

$$k = \pm\sqrt{a^2 - 1}.$$

Như vậy, ta có hai tiếp tuyến là

$$y = x\sqrt{a^2 - 1} + a, \quad y = -x\sqrt{a^2 - 1} + a.$$

Ta có thể giả sử phương trình đường thẳng AB, AC theo thứ tự trên. Một điểm bất kỳ trên AB có tọa độ là $M(x_0, y_0)$ với $y_0 = x_0\sqrt{a^2 - 1} + a$. Phương trình IM chính là $y = \frac{y_0}{x_0}x$. Giao điểm N của IM với AC có tọa độ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} y = -x\sqrt{a^2 - 1} + a \\ y = \dfrac{y_0}{x_0}x \end{cases}$$

Từ đây suy ra $N\left(\frac{ax_0}{y_0+x_0\sqrt{a^2-1}}, \frac{ay_0}{y_0+x_0\sqrt{a^2-1}}\right)$. Do vậy, tọa độ trung điểm của MN chính là

$$K\left(\frac{1}{2}\left(\frac{ax_0}{y_0+x_0\sqrt{a^2-1}}+x_0\right), \frac{1}{2}\left(\frac{ay_0}{y_0+x_0\sqrt{a^2-1}}+y_0\right)\right).$$

Lại thay $y_0 = x_0\sqrt{a^2-1}+a$ vào biểu thức trên, ta có

$$K\left(\frac{ax_0+x_0^2\sqrt{a^2-1}}{2x_0\sqrt{a^2-1}+a}, \frac{\left(a+x_0\sqrt{a^2-1}\right)^2}{2x_0\sqrt{a^2-1}+a}\right).$$

Gọi O là trung điểm AI thì $O\left(0, \frac{a}{2}\right)$. Ta thấy rằng:

- Phương trình đường thẳng qua O và song song với AB là $(d_1) : y = x\sqrt{a^2-1}+\frac{a}{2}$.
- Phương trình đường thẳng qua O và song song với AC là $(d_2) : y = -x\sqrt{a^2-1}+\frac{a}{2}$.
- Khoảng cách từ K đến (d_1) là

$$\frac{\left|\left(\frac{ax_0+x_0^2\sqrt{a^2-1}}{2x_0\sqrt{a^2-1}+a}\right)\sqrt{a^2-1}+\frac{a}{2}-\frac{\left(a+x_0\sqrt{a^2-1}\right)^2}{2x_0\sqrt{a^2-1}+a}\right|}{\sqrt{(a^2-1)+1}} = \left|\frac{a}{4x_0\sqrt{a^2-1}+2a}\right|.$$

- Khoảng cách từ K đến (d_2) là

$$\frac{\left|\left(\frac{ax_0+x_0^2\sqrt{a^2-1}}{2x_0\sqrt{a^2-1}+a}\right)\sqrt{a^2-1}-\frac{a}{2}+\frac{\left(a+x_0\sqrt{a^2-1}\right)^2}{2x_0\sqrt{a^2-1}+a}\right|}{\sqrt{(a^2-1)+1}} = \left|\frac{2x_0\sqrt{a^2-1}+a}{2a}\right|.$$

Suy ra $d_{K/(d_1)} \cdot d_{K/(d_2)} = \frac{1}{4}$ không đổi nên K thuộc hyperbol có hai tiệm cận là hai đường thẳng d_1, d_2 nói trên. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán này đã thể hiện rõ thế mạnh của phương pháp dùng trục tọa độ khi tính chất của quỹ tích không phải tương ứng với một đường đơn giản. Các công thức biến đổi tuy phức tạp nhưng nhờ sự tương tự giữa các biểu thức mà sau cùng, biểu thức thu được đã được lược bớt nhiều phần và kết quả cũng đẹp hơn nhiều.

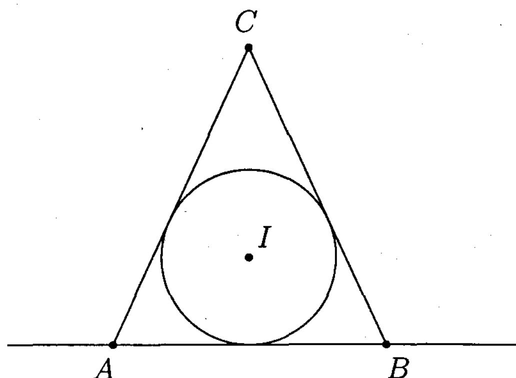
Ví dụ 4. *Xét một họ các tam giác cân có các tính chất sau: Chúng có đáy cùng nằm trên một đường thẳng d cố định, có đỉnh A thuộc đáy là một điểm cố định và có bán kính đường tròn nội tiếp bằng r không đổi. Chứng minh rằng cạnh bên không đi qua A của các tam giác này luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.*

Chứng minh. Xét hệ trục toạ độ có gốc toạ độ là $O \equiv A$, trục Ox là d và trục Oy là đường thẳng đi qua A và vuông góc với d. Đường tròn nội tiếp tam giác sẽ có phương trình

$$(x-m)^2+(y-r)^2 = r^2,$$

trong đó m là tham số và $I(m, r)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác.

Xét $\triangle ABC$ cân tại C là một tam giác trong họ các tam giác nói trên. Do tam giác ABC cân tại C nên điểm B đối xứng với A qua trung điểm J của AB, có toạ độ $B(2m, 0)$.



Xét phương trình đường thẳng (T) qua B với hệ số góc k là $y = k(x - 2m)$. Đường thẳng này tiếp xúc với (I) khi và chỉ khi $d\big(I, (T)\big) = r$, hay

$$k\big[(m^2 - r^2)k + 2rm\big] = 0.$$

Dễ thấy $k = 0$ tương ứng với phương trình đường thẳng AB. Từ đó phương trình BC có dạng

$$(D_m) : y = \frac{2rm}{r^2 - m^2}(x - 2m).$$

Ta có thể tìm được đường tròn cố định mà họ đường thẳng (D_m) luôn tiếp xúc bằng phương pháp tìm hình bao. Ta đi tìm các điểm mà không có đường thẳng D_m nào đi qua, tức là các điểm (x_0, y_0) sao cho phương trình $y_0 = \frac{2rm}{r^2-m^2}(x_0 - 2m)$ không có nghiệm m. Viết lại phương trình này dưới dạng một tam thức bậc hai có biến là m như sau

$$(y_0 - 4r)m^2 + 2rx_0m - y_0r^2 = 0.$$

Phương trình này vô nghiệm khi $\Delta = r^2x_0^2 + y_0r^2(y_0 - 4r) < 0$, hay

$$x_0^2 + (y_0 - 4r)^2 < 4r^2.$$

Điều này có nghĩa là với mọi giá trị m thì đường cong (D_m) cũng không bao giờ đi qua các điểm có tọa độ có dạng như trên. Suy ra hình bao của miền này, tức là đường tròn $x_0^2 + (y_0 - 4r)^2 = 4r^2$, chính là đường tròn cố định mà (D_m) luôn tiếp xúc.

Ta có thể kiểm tra lại điều này bằng cách tính khoảng cách từ $I(0, 2r)$ đến (D_m):

$$d(I, D_m) = \frac{\big| - 2rm(0 - 2m) + 2r(r^2 - m^2)\big|}{\sqrt{(r^2 - m^2)^2 + 4r^2 + m^2}} = 2r.$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Nhận xét. Việc dùng tọa độ thực sự có hiệu quả khi chúng ta muốn dự đoán và sáng tạo ra những bài toán mới khi và các quan hệ tương đối rắc rối nhưng về một nghĩa nào đó có thể biểu diễn theo hình giải tích không quá phức tạp. Nhiều quỹ tích cũng là các đường cong, rất giống một đường tròn hoặc một conic quen thuộc nào đó nhưng thực tế nó là một đường cong bậc hai không sơ cấp. Bài toán dưới đây trong đề kiểm tra đội tuyển của Trung Quốc năm 2008 đã cho thấy rõ điều đó:

Cho tam giác ABC đều và M là điểm di động trên cạnh BC. Gọi H, H' lần lượt là trực tâm của tam giác AMB, AMC và gọi I, I' lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác AMB, AMC theo thứ tự đó. Gọi K là giao điểm của HI và $H'I'$. Tìm quỹ tích điểm K.

Một bài toán tương tự như sau:

Cho tam giác đều ABC. X là điểm bất kỳ trên cạnh BC. Gọi I_1, I_2 lần lượt là tâm nội tiếp tam giác AXB, AXC. Tìm quỹ tích tâm ngoại tiếp tam giác AI_1I_2.

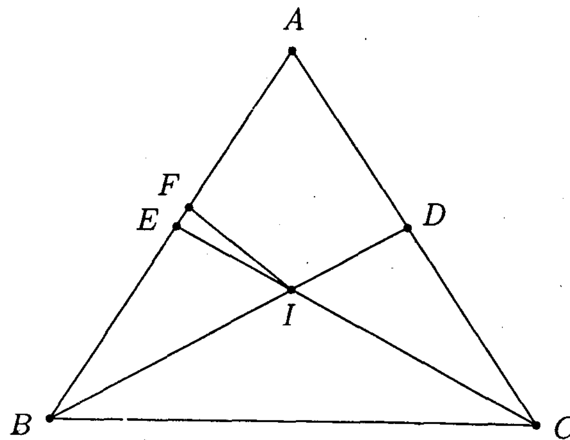
Qua các ví dụ trên, ta thấy rằng cũng như nhiều phương pháp khác, phương pháp tọa độ giúp cho lời giải tự nhiên hơn. Đưa vấn đề ở dạng Hình học thành dạng biến đổi Đại số một cách khéo léo nhưng cũng đòi hỏi một kỹ năng qua quá trình rèn luyện nhất định. Điều này trên thực tế dễ dàng hơn cho nhiều bạn học sinh khi tận dụng được tính khuôn mẫu và thống nhất của các công thức Hình học Giải tích.

2.2 Sử dụng biến đổi Đại số

Như trong phần trình bày ở trên, phương pháp tọa độ là một công cụ hiệu quả để giải quyết nhiều bài toán về đường phân giác. Tuy nhiên, trong một số trường hợp khác, công cụ này lại không thể dùng được và có khi lại làm bài toán rắc rối hơn bởi một điều hết sức dễ hiểu là do các phương trình phân giác hay tâm đường tròn nội tiếp thường có biểu thức phức tạp hơn các yếu tố vuông góc hoặc song song khác. Vì lí do đó mà ta sẽ xem xét tiếp một cách tiếp cận khác và nó chỉ dựa trên các công thức tính toán quen thuộc, biến đổi Đại số để thể hiện các điều kiện và kết luận. Phần này đưa ra hai lời giải gồm Hình phẳng thuần túy và Đại số để có thể dễ dàng phân tích và so sánh nhằm rút ra bài học cần thiết khi lựa chọn các phương pháp giải quyết một bài toán.

Ví dụ 5. *Cho tam giác ABC có hai phân giác BD và CE cắt nhau tại I. Giả sử $ID = IE$, chứng minh rằng tam giác ABC cân tại A hoặc $\angle BAC = 60°$.*

Chứng minh.



(a) *Cách 1.* Ta xét hai trường hợp sau

- *Nếu* $AD = AE$ thì $\triangle AID = \triangle AIE$ (c.c.c), suy ra $\angle ADI = \angle AEI$. Từ đây ta có $\triangle ADB = \triangle AEC$ (g.c.g), dẫn đến $AB = AC$ nên tam giác ABC cân tại A.

- *Nếu* $AD \neq AE$, không mất tính tổng quát, ta giả sử $AD < AE$. Trên đoạn AE, lấy điểm F sao cho $AD = AF$; khi đó, $\triangle ADI = \triangle AFI$ (c.g.c), suy ra $IF = ID = IE$. Điều này chứng tỏ tam giác IEF cân tại I, do vậy ta có $\angle IFE = \angle IEF$ hay

$$\angle ADI = \angle AFI = \angle BEI.$$

Suy ra tứ giác $ADIE$ nội tiếp và $\angle BAC + \angle DIE = 180°$, hay

$$\angle BAC + 90 + \frac{\angle BAC}{2} = 180°.$$

Do đó $\angle BAC = 60°$.

Từ hai trường hợp này, ta có điều phải chứng minh. □

(b) *Cách 2.* Theo công thức tính độ dài đường phân giác, ta có

$$BD = \frac{2\sqrt{cap(p-b)}}{c+a}.$$

Vì BD là phân giác góc B nên $\frac{AD}{CD} = \frac{c}{a}$ hay $AD = \frac{bc}{a+c}$. Hơn nữa, do AI là phân giác góc A trong tam giác ABD nên $\frac{ID}{IB} = \frac{AD}{AB} = \frac{b}{a+c}$, hay

$$\frac{ID}{BD} = \frac{b}{a+b+c} = \frac{b}{2p}.$$

Từ đây suy ra $ID = \frac{b}{2p}BD = \frac{b\sqrt{cap(p-b)}}{p(c+a)}$, hay

$$ID^2 = \frac{ab^2c(p-b)}{p(c+a)^2}.$$

Tương tự, ta cũng có

$$IE^2 = \frac{abc^2(p-c)}{p(a+b)^2}.$$

Từ giả thiết đã cho, ta có

$$\frac{ab^2c(p-b)}{p(c+a)^2} = \frac{abc^2(p-c)}{p(a+b)^2}.$$

Đẳng thức này có thể viết lại thành

$$(b-c)(a+b+c)(a^2-b^2-c^2+bc) = 0,$$

và ta có thể suy ra được $b = c$ hoặc $a^2 = b^2 + c^2 - bc$.

- Nếu $b = c$ thì tam giác ABC cân tại A.
- Nếu $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ thì $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$ nên $\angle BAC = 60°$.

Kết hợp hai trường hợp này lại, ta có điều phải chứng minh. □

Ví dụ 6. *Cho tam giác ABC nhọn ngoại tiếp đường tròn (I, r) có M là trung điểm BC. Gọi E là giao điểm của IM với đường cao AH của tam giác ABC. Chứng minh rằng $AE = r$.*

Chứng minh. **(a)** *Cách 1.* Gọi D là tiếp điểm của (I) lên BC và F là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp (J) của góc A. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của AF với (I), trong đó Q nằm giữa A và P. Giả sử ID cắt (I) tại điểm thứ hai là Q'. Qua Q' vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB và AC lần lượt tại B' và C'.

Dễ thấy tồn tại một phép vị tự biến $\triangle AB'C'$ thành $\triangle ABC$. Phép vị tự đó cũng biến tiếp điểm Q' của đường tròn bàng tiếp (I) của $\triangle AB'C'$ lên $B'C'$ thành tiếp điểm D của đường tròn bàng tiếp (J) của $\triangle ABC$ lên BC. Suy ra A, Q', F thẳng hàng hay $Q' \equiv Q$.

Dễ thấy D đối xứng với F qua M nên $MD = MF$, mà $ID = IQ$ nên IM là đường trung bình của $\triangle DQF$, suy ra $IM \parallel PQ$ và tứ giác $AEIQ$ là hình bình hành. Do đó

$$AE = IQ = r.$$

Ta có điều phải chứng minh. □

(b) *Cách 2.* Không mất tính tổng quát, giả sử $c \leqslant b$. Dễ dàng chứng minh được trên đoạn BC, các điểm B, H, D, M, C nằm thẳng hàng theo thứ tự đó. Ta có

$$DM = DC - MC = \frac{a+b-c}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b-c}{2}$$

và

$$MH = HC - MC = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a} - \frac{a}{2} = \frac{b^2-c^2}{2a}.$$

Theo định lý Thalès thì

$$\frac{ID}{HE} = \frac{DM}{MH} = \frac{\frac{b-c}{2}}{\frac{b^2-c^2}{2a}} = \frac{a}{b+c}.$$

Từ đó ta tính được

$$HE = \frac{(b+c)r}{a}.$$

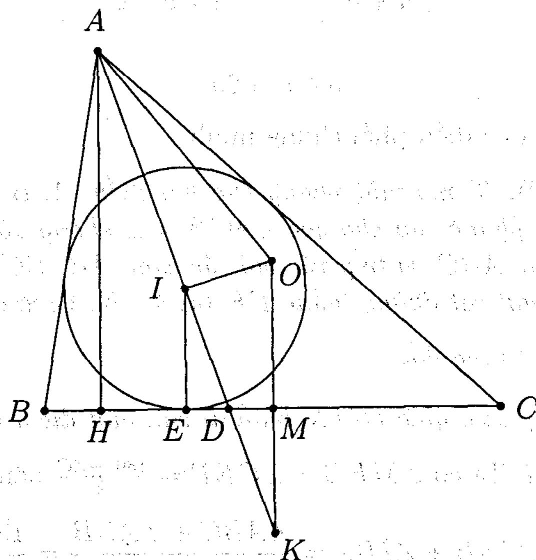
Ta cũng có $AH = \frac{2S}{a} = \frac{2pr}{a} = \frac{(a+b+c)r}{a}$ nên

$$AE = AH - HE = \frac{(a+b+c)r}{a} - \frac{(b+c)r}{a} = r.$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Ví dụ 7. *Cho tam giác ABC có $2BC = AB + AC$. Gọi O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh tam giác AIO vuông tại I.*

Chứng minh.



(a) *Cách 1.* Gọi H, D, M lần lượt là chân đường cao, phân giác và trung tuyến ứng với đỉnh A của tam giác ABC và E là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp lên B. Giả sử AD cắt OM tại K. Ta thấy

$$\angle HAB = \angle OAC = 90^\circ - \frac{\angle ABC}{2},$$

mà AI là phân giác $\angle BAC$ nên $\angle IAB = \angle IAC$, suy ra $\angle IAH = \angle IAO$. Mặt khác, lại có $AH \parallel OK$ nên $\angle IAH = \angle IKO$, do đó $\angle IAO = \angle IKO$ hay $\triangle AOK$ cân tại O. Ta dễ dàng tính được $DE = DM$ nên $DI = DK$ hay $IK = 2ID$. Đồng thời, theo định lý Thalès thì

$$\frac{DA}{DI} = \frac{HA}{IE} = \frac{AB+BC+CA}{BC} = 3.$$

Như vậy, ta có $\frac{AI}{DI} = 2$. Và do đó, $AI = IK$ hay I là trung điểm của đoạn AK, suy ra OI là trung tuyến của tam giác cân AOK nên OI cũng là đường cao của $\triangle AOK$. Vậy tam giác AOI vuông tại I. Ta có điều phải chứng minh. □

(b) *Cách 2.* Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp $\triangle ABC$. Ta có

$$AO^2 = R^2, \quad IO^2 = R^2 - 2Rr.$$

Theo định lý Pythagores, ta chỉ cần chứng minh

$$AI^2 = 2Rr.$$

Ta tính được $BD = \frac{ac}{b+c}$. Xét $\triangle ABD$, ta thấy AI chính là phân giác của tam giác này nên

$$AI = \frac{AB \cdot AD}{AB + BD} = \frac{c \cdot \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}}{c + \frac{ac}{b+c}} = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{a+b+c},$$

hay

$$AI^2 = \frac{bc(b+c-a)}{a+b+c}.$$

Mặt khác, lại có $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{S}{p}$, $2Rr = \frac{abc}{a+b+c}$ nên ta cần chứng minh

$$\frac{bc(b+c-a)}{a+b+c} = \frac{abc}{a+b+c},$$

hay

$$b + c = 2a.$$

Đẳng thức này đúng nên ta có điều phải chứng minh. □

Ví dụ 8 (Việt Nam, 2009). *Trong mặt phẳng cho hai điểm A, B cố định (A khác B). Một điểm C di động trong mặt phẳng sao cho góc $\angle ACB = \alpha$ không đổi ($0° < \alpha < 180°$). Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại D, E, F. Đường thẳng AI, BI lần lượt cắt đường thẳng EF tại M, N. Chứng minh rằng*

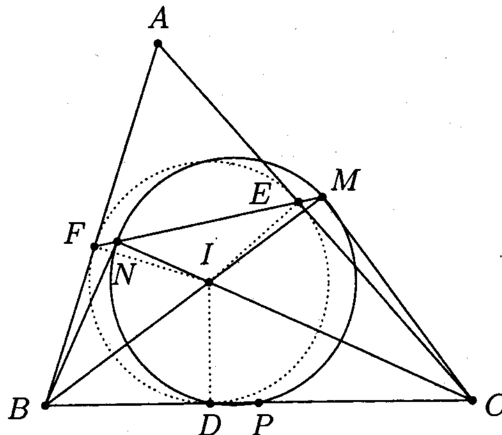
(i) *Đoạn MN có độ dài không đổi.*

(ii) *Đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN luôn đi qua một điểm cố định.*

Chứng minh. **(a)** *Cách 1.* Ta có $\angle MEB = \angle CEF = \frac{180° - \angle C}{2}$ nên

$$\angle MIB = \angle IAB + \angle IBA = \frac{\angle ABC + \angle ACB}{2} = \frac{180° - \angle C}{2}.$$

Suy ra $\angle MEB = \angle MIB$, do đó tứ giác $EMBI$ là nội tiếp nên $\angle IMB = \angle IEB = 90°$ hay tam giác AMB vuông ở M. Tương tự, ta cũng có tam giác NAB vuông tại N.



Do đó, tứ giác $ANMB$ nội tiếp trong đường tròn đường kính AB. Ta có $\triangle AIB \sim \triangle NIM$ (g.g) nên $\frac{AB}{MN} = \frac{IA}{NI}$, suy ra

$$MN = AB \cdot \frac{IN}{IA} = AB \sin \angle NAI = AB \sin \frac{\angle C}{2} = AB \sin \frac{\alpha}{2} = \text{const}.$$

Hơn nữa, ta thấy

$$\angle MDN = \angle IDN + \angle IDM = 2\left(90^\circ - \frac{\angle CAB + \angle CBA}{2}\right) = \angle C$$

Gọi P là trung điểm của AB thì P chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ANMB$, suy ra

$$\angle MPN = \angle MPA - \angle NPA = 2(\angle MBA - \angle NBA) = 2(90^\circ - \angle MAB - \angle NBA).$$

Do đó $\angle MPN = \angle MDN$. Suy ra tứ giác $MNDP$ nội tiếp hay đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN luôn đi qua P cố định. Đây chính là điều phải chứng minh. □

(b) *Cách 2.*

(i) Đặt $AB = c$ (không đổi), $BC = a$ và $CA = b$. Do $\angle ACB = \alpha$ không đổi nên C di động trên cung chứa góc α dựng trên đoạn AB. Gọi AH, BK là các đường phân giác của $\triangle ABC$. Ta sẽ tính MN trong trường hợp N thuộc đoạn EF và M nằm ngoài đoạn EF, khi đó E nằm giữa C và H, K nằm giữa F và C; ngoài ra ta cũng có $b \leqslant c$, $c \leqslant a$ hay $b \leqslant c \leqslant a$ (các trường hợp còn lại hoàn toàn tương tự). Theo tính chất đường phân giác, ta tính được $HC = \frac{ab}{b+c}$. Do E là tiếp điểm của (I) lên BC, F là tiếp điểm của (I) lên CA nên

$$CE = CF = \frac{CA + CB - AB}{2} = \frac{a+b-c}{2}, \; AF = AD = \frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{c+b-a}{2}$$

Suy ra

$$HE = HC - CE = \left(\frac{ab}{b+c}\right) - \left(\frac{a+b-c}{2}\right) = \frac{(c-b)(b+c-a)}{2(b+c)}$$

Tương tự, ta tính được

$$KC = \frac{ab}{a+c}, \quad KF = \frac{(a-c)(a+c-b)}{2(a+c)}.$$

Ngoài ra, ta cũng có

$$EF = 2CF \sin \angle ECI = (a+b-c)\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Do A, H, M thẳng hàng và lần lượt nằm trên các đường thẳng chứa các cạnh của $\triangle CEE$ nên theo định lý Menelaus thì $\frac{AF}{AC} \cdot \frac{HC}{HE} \cdot \frac{ME}{MF} = 1$, hay

$$\frac{b+c-a}{2b} \cdot \frac{2ab}{(c-b)(b+c-a)} \cdot \frac{MF-EF}{MF} = 1,$$

từ đó suy ra

$$MF = EF \cdot \frac{a}{a+b-c}.$$

Tương tự, do K, N, B thẳng hàng và lần lượt nằm trên các đường thẳng chứa cạnh của $\triangle CEF$ nên $\frac{KC}{KF} \cdot \frac{NF}{NE} \cdot \frac{BE}{BC} = 1$, hay

$$\frac{NF}{EF-NF} = \frac{a-c}{b}.$$

Từ đẳng thức này, ta tính được

$$NF = EF \cdot \frac{a-c}{a+b-c}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} MN = MF - NF &= EF \cdot \frac{a}{a+b-c} - EF \cdot \frac{a-c}{a+b-c} \\ &= (a+b-c)\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{c}{a+b-c} = c\sin\frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Do c và góc α không đổi nên MN không đổi. Vậy (i) được chứng minh.

(ii) Gọi P là trung điểm của AB. Ta sẽ chứng minh P chính là điểm cố định cần tìm. Nếu $CA = CB$, nghĩa là tam giác ABC cân tại C thì D trùng với P và (DMN) đi qua P.

Xét trường hợp $CA \neq CB$. Giả sử $BC > AC$ $(a > b)$ thì đường thẳng MN cắt đường thẳng AB tại J. Do các điểm E, F, J thẳng hàng và lần lượt nằm trên các đường thẳng chứa cạnh của $\triangle ABC$ nên theo định lý Menelaus thì $\frac{EC}{EB} \cdot \frac{FA}{FC} \cdot \frac{JB}{JA} = 1$, suy ra $\frac{JB}{JA} = \frac{EB}{FA} = \frac{a+c-b}{b+c-a}$, dẫn đến

$$JA = \frac{c(b+c-a)}{2(a-b)}.$$

Từ đây, ta được

$$JD = JA + AD = \frac{c(b+c-a)}{2(a-b)} + \frac{b+c-a}{2} = \frac{(b+c-a)(c+a-b)}{2(a-b)}$$

và

$$JP = JA + AD = \frac{c(b+c-a)}{2(a-b)} + \frac{c}{2} = \frac{c^2}{2(a-b)}.$$

Do đó

$$JD \cdot JP = \frac{(b+c-a)(c+a-b)}{2(a-b)} \cdot \frac{c^2}{2(a-b)} = \frac{c^2(b+c-a)(c+a-b)}{4(a-b)^2}. \qquad (1)$$

Tương tự, do J, A, B thẳng hàng và lần lượt nằm trên các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác CEF nên $\frac{JE}{JF} \cdot \frac{AF}{AC} \cdot \frac{BC}{BE} = 1$ nên

$$\frac{JF+EF}{JF} \cdot \frac{\frac{b+c-a}{2}}{b} \cdot \frac{a}{\frac{a+c-b}{2}} = 1,$$

suy ra

$$JF = EF \cdot \frac{a(b+c-a)}{(a-b)(a+b-c)}.$$

Từ đây ta thu được các đẳng thức

$$JM = JF + MF = EF \cdot \frac{a(b+c-a)}{(a-b)(a+b-c)} + EF \cdot \frac{a}{a+b-c} = EF \cdot \frac{ac}{(a-b)(a+b-c)},$$

$$JN = JF + FN = EF \cdot \frac{a(b+c-a)}{(a-b)(a+b-c)} + EF \cdot \frac{a-c}{a+b-c} = EF \cdot \frac{bc}{(a-b)(a+b-c)}.$$

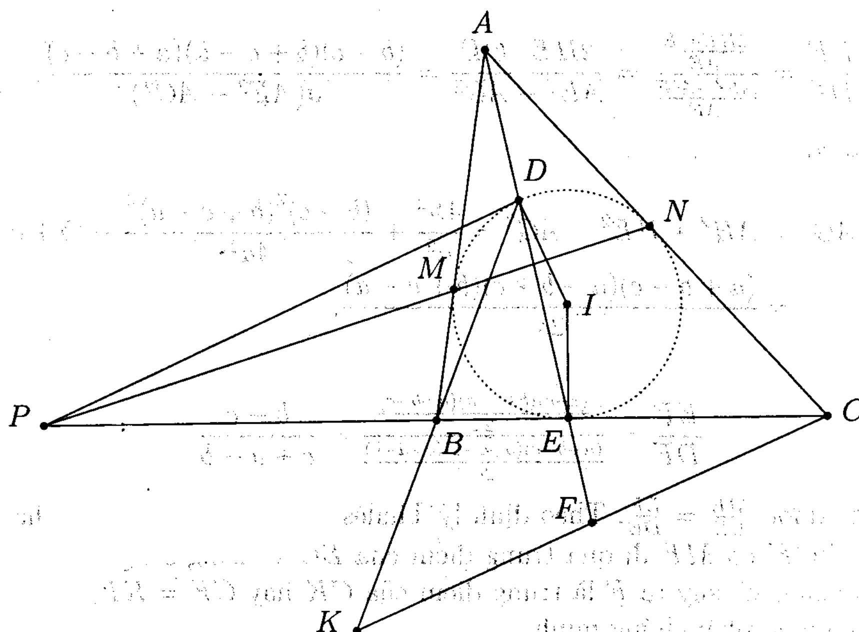
Và do đó, ta tính được

$$\begin{aligned} JM \cdot JN &= EF^2 \cdot \frac{ac}{(a-b)(a+b-c)} \cdot \frac{bc}{(a-b)(a+b-c)} \\ &= (a+b-c)^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{abc^2}{(a+b-c)^2(a-b)^2} = \frac{(1-\cos\alpha)}{2} \cdot \frac{abc^2}{(a-b)^2} \\ &= \left(1 - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) \cdot \frac{abc^2}{2(a-b)^2} = \frac{c^2(b+c-a)(c+a-b)}{4(a-b)^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $JD \cdot JP = JM \cdot JN$; do đó tứ giác $DPMN$ nội tiếp hay đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN đi qua P. □

Ví dụ 9 (Trung Quốc, 2008). *Cho tam giác nhọn không cân ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp. Gọi E là tiếp điểm của (I) trên các cạnh BC, đoạn thẳng AE cắt (I) tại điểm thứ hai khác E là D. Trên đường thẳng AE lấy điểm F sao cho $CE = CF$. Đường thẳng BD cắt đường thẳng CF tại K. Chứng minh rằng $KF = CE$.*

Chứng minh. **(a)** *Cách 1.* Không mất tính tổng quát, giả sử $\angle B < \angle C$. Gọi M, N lần lượt là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp (I) lên các cạnh AB, AC. Gọi P là giao điểm của đường thẳng MN và BC.



Theo một tính chất quen thuộc về cực và đối cực, ta thấy rằng PD chính là tiếp tuyến của (I), suy ra $\angle PED = \angle PDE$. Hơn nữa, do $\angle PED = \angle CEF = \angle CFE$ nên suy ra PD và CF song song với nhau. Dễ thấy $\frac{PB}{PC} = \frac{EB}{EC}$ nên P, B, E, C là một hàng điểm điều hòa. Suy ra D cùng với P, B, E, C lập thành một chùm điều hòa.

Do PD song song với CF, đồng thời K thuộc DB, F thuộc DE nên theo tính chất về chùm điều hòa. ta có được F là trung điểm của KC. □

(b) *Cách 2.* Gọi H là hình chiếu của A lên BC, M là trung điểm của BC. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $AB < AC$, tức là $c < b$. Khi đó M nằm giữa C và E. Vì E là tiếp điểm của (I) lên BC nên ta có các kết quả

$$BE = \frac{c+a-b}{2}, \quad CE = \frac{a+b-c}{2}, \quad ME = CE - CM = \frac{a+b-c}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b-c}{2}.$$

Suy ra

$$\frac{ME}{BE} = \frac{b-c}{c+a-b}. \tag{1}$$

Do AH là đường cao của tam giác ABC nên $CH = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$, suy ra

$$HE = HC - EC = \frac{(b-c)(b+c-a)}{2a}.$$

Do $CE = CF$ nên $\triangle CEF$ cân ở C. Ta có

$$\cos\angle AEH = \frac{HE}{AE}, \quad \cos\angle CEF = \frac{EF}{2CE}$$

nên $\frac{HE}{AE} = \frac{EF}{2CE}$ hay

$$EF = \frac{2HE \cdot CE}{AE}.$$

Gọi G là tiếp điểm của (I) lên cạnh AB. Theo tính chất phương tích, $AG^2 = AD \cdot AE$, suy ra

$$DE = AE - AD = \frac{AE^2 - AG^2}{AE}.$$

Do đó

$$\frac{EF}{DE} = \frac{\frac{2HE\cdot CE}{AE}}{\frac{AE^2-AG^2}{AE}} = \frac{2HE \cdot CE}{AE^2 - AG^2} = \frac{(b-c)(b+c-a)(a+b-c)}{a(AE^2 - AG^2)}.$$

Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned} AE^2 - AG^2 = AH^2 + HE^2 - AG^2 &= \frac{4S^2}{a^2} + \frac{(b-c)^2(b+c-a)^2}{4a^2} - (b+c-a)^2 \\ &= \frac{(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}{2a}, \end{aligned}$$

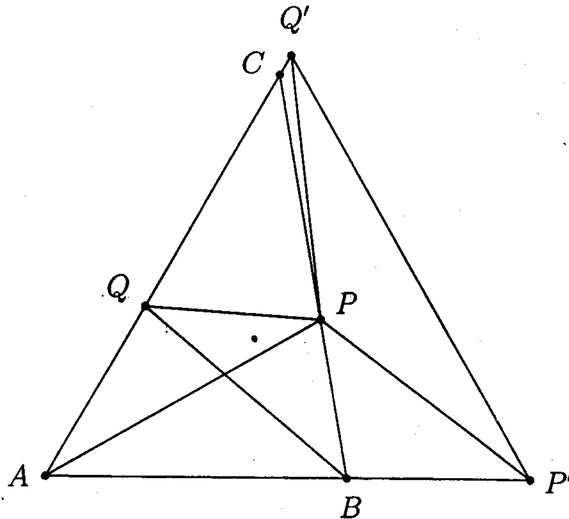
vì thế

$$\frac{EF}{DE} = \frac{\frac{(b-c)(b+c-a)(a+b-c)}{2a}}{\frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{2a}} = \frac{b-c}{c+a-b}. \tag{2}$$

Từ (1) và (2), ta được $\frac{ME}{BE} = \frac{EF}{DE}$. Theo định lý Thalès đảo, ta có $MF \parallel BD$ hay $MF \parallel BK$. Trong tam giác BCK có MF đi qua trung điểm của BC và song song với BK nên cũng đi qua trung điểm của CK, suy ra F là trung điểm của CK hay $CF = KF$, mà $CE = CF$ nên $KF = CE$. Ta có điều phải chứng minh. □

Ví dụ 10 (IMO, 2001). *Cho tam giác ABC có góc A bằng $60°$ và AP, BQ lần lượt là các phân giác trong của góc A, B. Biết rằng $AB + BP = AQ + QB$, tính các góc còn lại của tam giác ABC.*

Lời giải.



(a) *Cách 1.* Đặt $\angle ABC = \beta$. Trên tia đối của BA, lấy điểm P' sao cho $BP' = BP$, trên tia AQ lấy điểm Q' sao cho $AP' = AQ'$. Tam giác BPP' cân tại B với góc đáy là $\frac{\beta}{2}$. Tam giác $AP'Q'$ cân tại A có góc ở đỉnh là $60°$ nên là tam giác đều. Ta có

$$AQ + QQ' = AB + BP' = AB + BP = AQ + QB,$$

nên $QQ' = QB$. Do tam giác $AP'Q'$ đều và AP là phân giác nên P cách đều hai điểm P', Q' hay $PP' = PQ'$. Ta sẽ chứng minh rằng B, P, Q' thẳng hàng.

Thật vậy, giả sử ngược lại là tam giác BPQ' không suy biến. Ta có

$$\angle PBQ = \angle PP'B = \angle PQ'Q = \frac{\beta}{2}.$$

Tam giác BQQ' cân tại Q và có điểm P thỏa mãn $\angle PBQ = \angle PQ'Q = \frac{\beta}{2}$ nên hai tam giác PQB và PQQ' bằng nhau, suy ra P nằm trên phân giác trong của $\angle BQQ'$, tức là P là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABQ. Do đó P cũng nằm trên phân giác góc $\angle QBP'$, suy ra $\frac{\beta}{2} = \angle PBQ = \angle PBP' = 180° - \beta$ và ta tính được $\beta = 120°$. Nhưng điều này mâu thuẫn do $\beta = 120° - \angle ACB < 120°$.

Từ đây suy ra tam giác BPQ' suy biến, tức là P nằm trên BQ' hay Q' trùng với C. Tam giác BCQ cân tại Q nên $\angle CBQ = \angle BCQ$ hay $120° - \beta = \frac{\beta}{2}$, suy ra $\beta = 80°$.

Vậy $\angle ABC = 80°$ và $\angle ACB = 40°$. □

(b) *Cách 2.* Đặt $l_b = BQ$, theo công thức tính độ dài đường phân giác thì

$$l_b = \frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2}.$$

Mặt khác, ta cũng tính được $BP = \frac{ac}{b+c}$, $AQ = \frac{bc}{a+c}$. Do đó, đẳng thức đã cho tương đương với

$$c + \frac{ac}{b+c} = \frac{bc}{a+c} + l_b.$$

Ta có thể viết lại đẳng thức này thành

$$c + \frac{ac}{b+c} = \frac{bc}{a+c} + \frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2},$$

$$c(c+a)(b+c) + ac(a+c) = bc(b+c) + 2ac(b+c)\cos\frac{B}{2},$$

$$ab + (a+c)^2 - b^2 = 2a(b+c)\cos\frac{B}{2}.$$

Thay $(a+c)^2 - b^2 = 4p(p-b) = 4ac\cos^2\frac{B}{2}$ vào, ta được

$$ab + 4ac\cos^2\frac{B}{2} = 2a(b+c)\cos\frac{B}{2},$$

hay tương đương

$$b\left(1 - 2\cos\frac{B}{2}\right) = 2c\cos\frac{B}{2}\left(1 - 2\cos\frac{B}{2}\right).$$

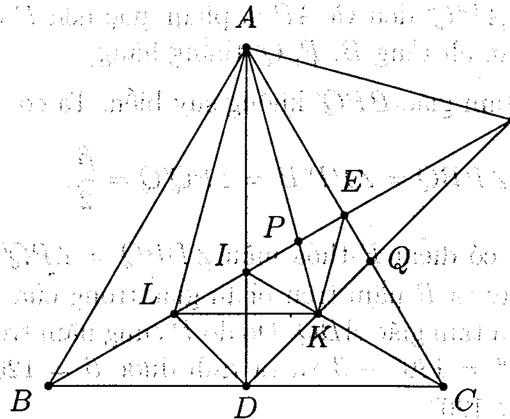
Mà $1 - 2\cos\frac{B}{2} \neq 0$ nên $b = 2c\cos\frac{B}{2}$ hay

$$\sin B = 2\sin C\cos\frac{B}{2},$$

tức là $\sin\frac{B}{2} = \sin C$ nên $\angle B = 2\angle C$. Từ đó ta tính được $\angle B = 80°$, $\angle C = 40°$. □

Ví dụ 11 (IMO, 2009). *Cho tam giác ABC cân tại A có AD và BE là các phân giác trong với $D \in BC, E \in AC$. Gọi K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADC. Biết rằng $\angle BEK = 45°$, tính số đo góc A của tam giác ABC.*

Lời giải.



(a) *Cách 1.* Gọi I, L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và BDA. Dễ thấy $\angle ALI = \angle ABL + \angle LAB = 45° = \angle BEK$ nên $AL \parallel EK$.

Gọi L' là giao điểm của DK và BI. Từ

$$\angle DL'I = \angle BID - \angle IDK = \angle ALI + \angle IAL - \angle IDK = \angle IAL = \frac{\angle BAC}{2},$$

ta suy ra bốn điểm A, L, D, L' cùng thuộc một đường tròn. Do đó

$$\angle LAL' = 180° - \angle LDL' = 90°.$$

Xét tam giác AKL' với KE là đường cao đỉnh K và $\angle KAE = \angle KL'E$. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của $L'E$ với AK, AK với KL. Ta xét các trường hợp sau:

- *Nếu* $KA = KL'$ thì rõ ràng AKL' là tam giác cân tại K. Hơn nữa,

$$\angle ALL' = \angle AL'L = \angle ADL = 45^\circ.$$

Từ đó suy ra $AL = AK = AL' = KL'$ nên $\triangle AKL'$ đều. Như thế, ta tính được

$$\frac{\angle BAC}{4} = \angle KL'E = 60^\circ - \angle LL'A = 15^\circ,$$

hay $\angle BAC = 60^\circ$.

- *Nếu* $KA \neq KL'$, gọi M là giao điểm của PQ với AL'. Tứ giác $APQL'$ nội tiếp có M là giao điểm của hai cạnh đối diện và $MA \perp KE$ nên theo định lý về cực và đối cực, MA là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $APQL'$. Do đó, $\angle APL' = \angle AQL' = 90^\circ$ và ta tính được

$$90^\circ = \angle APL' = \angle BAP + \angle ABP = \frac{3\angle BAC}{4} + 45^\circ - \frac{\angle BAC}{4} = 45^\circ + \frac{\angle BAC}{2},$$

hay $\angle BAC = 90^\circ$.

Dễ dàng chứng minh được rằng nếu $\angle BAC = 60^\circ$ hoặc $\angle BAC = 90^\circ$ thì có ngay $\angle BEK = 45^\circ$. Vậy $\angle BAC = 60^\circ$ hoặc $\angle BAC = 90^\circ$. □

(b) *Cách 2.* Gọi D là trung điểm BC, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Giả sử DK cắt AC tại Q. Đặt $AB = AC = a$, $BC = 2$, suy ra $DB = DC = 1$.

Do $\angle EIK = \angle IBC + \angle ICB = 2\angle ICB = \angle TBD$ và $\angle IEK = \angle CDQ = 45^\circ$ nên hai tam giác IEK và CDQ đồng dạng với nhau, suy ra

$$\frac{IE}{IK} = \frac{CD}{CQ}. \quad (1)$$

Theo tính chất đường phân giác trong tam giác ICD thì $\frac{DI}{DC} = \frac{KI}{KC}$, hay

$$\frac{IK}{ID} = \frac{KC}{CD} = \frac{IK + KC}{ID + CD} = \frac{IC}{ID + 1}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{IK} = \frac{ID + 1}{ID \cdot IC} = \frac{ID + 1}{ID \cdot IB}.$$

Tương tự, theo tính chất đường phân giác trong $\triangle BEC$ thì $\frac{IE}{IB} = \frac{CE}{CB}$ hay $IE = \frac{EC \cdot IB}{2}$. Do đó

$$\frac{IE}{IK} = \left(1 + \frac{1}{ID}\right)\frac{EC}{2}.$$

Xét tam giác ABC có $\frac{EC}{BC} = \frac{EC}{2} = \frac{AC}{AB+BC} = \frac{a}{a+2}$ nên $EC = \frac{2a}{a+2}$. Cũng theo tính chất của đường phân giác trong tam giác thì

$$\frac{ID}{DC} = \frac{KI}{KC} = \frac{AI}{AC} = \frac{AI + ID}{AC + DC} = \frac{AD}{a+1},$$

nên ta suy ra

$$\frac{IE}{IK} = \frac{(AD + a + 1)a}{AD(a+2)}. \quad (2)$$

Mặt khác, ta cũng có
$$\frac{CD}{CQ} = \frac{AD}{AQ} = \frac{AD+1}{a}. \tag{3}$$
Từ các tỉ số (1), (2) và (3), ta được
$$\frac{(AD+a+1)a}{AD(a+2)} = \frac{1+AD}{a}.$$
Biến đổi biểu thức này, ta được
$$AD(a^2-a-2)+a^3+a^2 = AD^2(a+2).$$
Mà $AD^2 = a^2-1$ nên $AD(a^2-a-2)+a^3+a^2 = (a^2-1)(a+2)$, hay
$$AD(a^2-a-2) = a^2-a-2.$$
Từ đây, ta có hai trường hợp xảy ra:

- *Nếu* $AD=1$ thì $DA=DB=DC=1$ và $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên $\angle BAC = 90°$.
- *Nếu* $a^2-a-2=0$ thì $a=2$, suy ra $\angle BAC = 60°$.

Vậy $\angle BAC = 60°$ hoặc $\angle BAC = 90°$. □

2.3 Phương pháp sử dụng hệ tọa độ tỉ cự

Hệ tọa độ tỉ cự chính là cách xây dựng tọa độ các điểm và phương trình các đường thẳng thông qua cơ sở vector. Nhờ các công thức, kết quả xây dựng từ trước mà những tính toán và biến đổi Hình học được mô hình hóa thành các lớp đại lượng và quan hệ Hình học ràng buộc giữa chúng. Khái niệm này được giới thiệu lần đầu tiên bởi giáo sư Toán người Đức là August Ferdinand Mobius vào năm 1827 và trải qua nhiều thế hệ các nhà Toán học phát triển, bổ sung, giờ đây nó thực sự đã trở thành một công cụ rất mạnh cho việc nghiên cứu Hình học phẳng, đặc biệt là các bài toán về tam giác.

Ví dụ 12. *Cho tam giác ABC không vuông tại A có AD, BE là các đường cao và AP, BQ là các đường phân giác trong. Gọi O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng D, E, I thẳng hàng khi và chỉ khi P, Q, O thẳng hàng.*

Chứng minh. Theo các công thức cơ bản về hệ trục tọa độ tỉ cự xét với tam giác cơ sở là ABC thì $O(a^2S_a, b^2S_b, c^2S_c)$, $I(a, b, c)$, $D(0, S_c, S_b)$, $E(S_c, 0, S_a)$, $P(0, b, c)$ và $Q(a, 0, c)$. Khi đó, ta có

- D, E, I thẳng hàng khi và chỉ khi
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & S_c & S_b \\ S_c & 0 & S_a \end{vmatrix} = 0,$$
hay $S_c(aS_a + bS_b - cS_c) = 0$.
- P, Q, O thẳng hàng khi và chỉ khi
$$\begin{vmatrix} a^2S_a & b^2S_b & c^2S_c \\ 0 & b & c \\ a & 0 & c \end{vmatrix} = 0,$$
hay $abc(aS_a + bS_b - cS_c) = 0$.

Vì tam giác ABC không vuông tại C nên $S_C \neq 0$, cả hai điều kiện trên cùng xảy ra khi và chỉ khi $aS_a + bS_b = cS_c$ nên ta có điều phải chứng minh. □

Ví dụ 13. *Cho tam giác ABC không vuông tại C có M là trung điểm AB. Gọi CH, CD lần lượt là đường cao và phân giác trong của tam giác và K, L lần lượt là trung điểm của chúng. Gọi P là giao điểm của CD và MK. Chứng minh rằng P, L lần lượt là hai điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC.*

Chứng minh. Ta có $H(S_b, S_a, 0)$, $D(a, b, 0)$, $M(1, 1, 0)$. Suy ra $K(S_b, S_a, c^2)$, $L(a, b, a+b)$. Phương trình đường thẳng MK là

$$-xc^2 + yc^2 + (b^2 - a^2)z = 0.$$

Phương trình đường thẳng CD là

$$bx - ay = 0.$$

Tọa độ giao điểm $P(x_P, y_P, z_P)$ của chúng phải thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} bx_P - ay_P = 0 \\ -x_Pc^2 + y_Pc^2 + (b^2 - a^2)z_P = 0 \end{cases}$$

tương đương

$$\begin{cases} y_P = \dfrac{b}{a}x_P \\ -x_Pc^2 + yc^2 + (b^2 - a^2)z_P = 0 \end{cases}$$

Từ đây, ta tính được $P\big(a(a+b), b(a+b), c^2\big)$ hay $P\left(a, b, \frac{c^2}{a+b}\right)$. So sánh tọa độ của P và L, ta thấy ngay rằng hai điểm này liên hợp đẳng giác theo điều kiện đã nêu. Ta có điều phải chứng minh. □

Ví dụ 14. *Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp I tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F và M là trung điểm BC. Chứng minh rằng AM, EF, ID đồng quy.*

Chứng minh. Ta có tọa độ của các điểm như sau

$$I(a, b, c),\ D\left(0, \frac{1}{p-b}, \frac{1}{p-c}\right),\ E\left(\frac{1}{p-a}, 0, \frac{1}{p-c}\right),\ F\left(\frac{1}{p-a}, \frac{1}{p-b}, 0\right),\ M(0, 1, -1).$$

Phương trình đường thẳng AM là

$$-y + z = 0.$$

Phương trình đường thẳng EF là $\frac{-x}{(p-c)(p-b)} + \frac{y}{(p-c)(p-a)} + \frac{z}{(p-a)(p-b)} = 0$, hay

$$-(p-a)x + (p-b)y + (p-c)z = 0.$$

Phương trình đường thẳng ID là

$$\big[b(p-b) - c(p-c)\big]x - a(p-b)y + a(p-c)z = 0.$$

Ba đường thẳng này đồng quy khi và chỉ khi

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -(p-a) & p-b & p-c \\ b(p-b) - c(p-c) & -a(p-b) & a(p-c) \end{vmatrix} = 0,$$

hay là

$$(p-a)\big[-a(p-c) + a(p-b)\big] + \big[b(p-b) - c(p-c)\big]\big[-(p-c) - (p-b)\big] = 0.$$

Dễ thấy đẳng thức này đúng nên ta có điều phải chứng minh. □

Bằng sự hỗ trợ của máy tính, hơn 3600 điểm và đường thẳng tạo ra từ phương pháp tọa độ tỉ cự; dựa vào đó, ta có thể biết chính xác được điểm nào thuộc đường nào, những đường nào đồng quy và những điểm chia các đoạn thẳng theo tỉ lệ nào, ... Đây là một công trình đồ sộ được thực hiện bởi nhiều nhà Toán học tâm huyết và kinh nghiệm. Có thể nói rằng dưới góc nhìn của hệ tọa độ tỉ cự, tam giác đã được khai thác tất cả những gì mà nó có. Chúng ta có thể tham khảo đầy đủ nội dung này tại [10] để thấy rõ hơn sức mạnh của hệ tọa độ tỉ cự trong việc nghiên cứu Hình học ở mức độ cao cấp.

2.4 Phương pháp sử dụng số phức

Ví dụ 15. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (I), ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi P, Q, R lần lượt là tiếp điểm của (I) lên các cạnh BC, CA, AB và H là trực tâm tam giác PQR. Chứng minh rằng H nằm trên đường thẳng OI.*

Chứng minh. Xét đường tròn đơn vị trùng với (I) và các điểm P, Q, R được biểu diễn lần lượt bởi các số phức p, q, r. Ta có tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

$$o = \frac{2pqr(p+q+r)}{(p+q)(q+r)(r+p)},$$

và trọng tâm G của tam giác PQR chính là

$$g = \frac{p+q+r}{3}.$$

Dễ thấy rằng tồn tại số thực k sao cho $o = kg$ nên đường thẳng OG đi qua gốc tọa độ I hay các điểm O, G, I thẳng hàng. Ta cũng có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR nên IG là đường thẳng Euler của tam giác PQR, tức là IG đi qua H. Từ các điều này, ta có H thuộc đường thẳng OI. □

Nhận xét. Bài toán này nếu dùng kiến thức Hình phẳng thông thường thì không đơn giản, lời giải nhẹ nhàng nhất là dùng phép nghịch đảo.

Ví dụ 16 (Iran, 1995). *Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi X, Y, Z lần lượt là trung điểm của EF, FD, DE. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC thuộc đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC và tam giác XYZ.*

Chứng minh. Gọi d, e, f là các số phức trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn các điểm D, E, F tương ứng. Giả sử đường tròn đơn vị là đường tròn nội tam giác abc. Khi đó, tâm của đường tròn này có tọa độ là

$$o = \frac{2def(d+e+f)}{(d+e)(e+f)(f+d)}.$$

Ta sẽ xác định tâm đường tròn ngoại tiếp o' tam giác xyz. Dễ dàng thấy rằng

$$x = \frac{e+f}{2}, \quad y = \frac{d+f}{2}, \quad z = \frac{d+e}{2}.$$

Ta có

$$\frac{o' - \frac{x+y}{2}}{\overline{o'} - \frac{\overline{x+y}}{2}} = -\frac{x-y}{\overline{x}-\overline{y}} = \frac{e-d}{\overline{e}-\overline{d}} = -de.$$

Biến đổi biểu thức này, ta được

$$\overline{o'} = \frac{\frac{f}{2} + \frac{de}{2f} + o'}{de}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$\overline{o'} = \frac{\frac{d}{2} + \frac{ef}{2d} + o'}{ef}.$$

Do đó

$$\frac{\frac{f}{2} + \frac{de}{2f} + o'}{de} = \frac{\frac{d}{2} + \frac{ef}{2d} + o'}{ef}.$$

Từ đây ta suy ra

$$o' = \frac{d+e+f}{2}.$$

Bây giờ, ta sẽ đi chứng minh bài toán đã cho. Do tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC cũng là tâm của hệ trục tọa độ nên ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{o'-i}{\overline{o'}-i} = \frac{o-i}{\overline{o}-i}.$$

Điều này dễ dàng có được bởi tọa độ các điểm o và o' ta đã tính được như trên. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Từ bài toán trên, hãy suy ra kết quả sau trong đề thi của Balkan 1990: *Gọi D, E, F là chân các đường cao của tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp tam giác DEF tiếp xúc với các cạnh tại G, H, I. Chứng minh rằng hai tam giác ABC và GHI có chung đường thẳng Euler.*

Ví dụ 17. *Giả sử đường tròn nội tiếp I tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Giả sử AI cắt EF tại K, ED cắt KC tại N và DF cắt KB tại M. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với BC.*

Chứng minh. Chọn (I) làm đường tròn đơn vị. Gọi d, e, f lần lượt là tiếp điểm của (I) lên BC, CA, AB. Ta có $b = \frac{2fd}{f+d}$, $c = \frac{2de}{d+e}$, trung điểm của M của EF chính là $\frac{e+f}{2}$.

Do $\overline{m}$ thuộc đoạn ef nên $\overline{m} = \frac{f+d-m}{fd}$. Ta thấy rằng b, m, k thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\frac{k-m}{\overline{k}-\overline{m}} = \frac{b-k}{\overline{b}-\overline{k}},$$

hay là

$$\overline{m} = m \cdot \frac{\overline{b}-\overline{k}}{b-k} + \frac{\overline{k}b - k\overline{b}}{b-k}.$$

Từ đó suy ra $\frac{f+d-m}{fd} = m \cdot \frac{\overline{b}-\overline{k}}{b-k} + \frac{\overline{k}b-k\overline{b}}{b-k}$, hay

$$m = \frac{(f+d)(b-k) + (k\overline{b} - \overline{k}b)fd}{(\overline{b}-\overline{k})fd + b - k}.$$

Mặt khác, ta cũng có

$$b - k = \frac{3fd - de - f^2 - ef}{2(f+d)}, \quad k\overline{b} - \overline{k}b = \frac{(e+f)(e-d)fd}{e(f+d)}.$$

Suy ra
$$m = \frac{4ef^2d + efd^2 - e^2d^2 - e^2f^2 - 2f^2d^2 - f^3e}{6def - (d^2e + e^2f + f^2d + de^2 + ef^2 + fd^2)}.$$

Tương tự, ta cũng tính được
$$n = \frac{4e^2fd + efd^2 - f^2d^2 - e^2f^2 - 2e^2d^2 - e^3f}{6def - (d^2e + e^2f + f^2d + de^2 + ef^2 + fd^2)}.$$

Và như thế,
$$m - n = \frac{(e-f)(4def - d^2e - d^2f - ef^2 - e^2f)}{6def - (d^2e + e^2f + f^2d + de^2 + ef^2 + fd^2)}.$$

Từ đây dễ dàng có được
$$\frac{m-n}{\overline{m}-\overline{n}} = -\frac{i-d}{\overline{i}-\overline{d}} = -d^2,$$

tức MN vuông góc với ID, hay MN song song với BC. Bài toán được chứng minh xong. □

Ví dụ 18 (Tournament of Town). *Cho tam giác ABC có H, I, O lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Gọi K là tiếp điểm của (I) với BC. Chứng minh rằng nếu IO song song với BC thì AO song song với HK.*

Chứng minh. Xét (I) là đường tròn đơn vị và k, l, m là các số phức biểu diễn các điểm K, L, M lần lượt là tiếp điểm của (I) lên BC, CA, AB. Ta có
$$o = \frac{2klm(k+l+m)}{(k+l)(l+m)(m+k)}, \quad h = \frac{2\left[k^2l^2 + l^2m^2 + m^2k^2 + klm(k+l+m)\right]}{(k+l)(l+m)(m+k)}.$$

Nếu IO song song với BC thì IO vuông góc với IK, tức là $\frac{o-i}{\overline{o}-\overline{i}} = -\frac{k-i}{\overline{k}-\overline{i}} = -k^2$. Từ đây suy ra
$$klm(k+l+m) + k^2(kl + lm + mk) = 0.$$

Ta sẽ chứng minh rằng AO song song với HK, tức là
$$\frac{a-o}{\overline{a}-\overline{o}} = \frac{h-k}{\overline{h}-\overline{k}}, \text{ trong đó } a = \frac{2ml}{m+l}.$$

Ta tính được
$$a - o = \frac{2ml}{m+l} - \frac{2klm(k+l+m)}{(k+l)(l+m)(m+k)} = \frac{2m^2l^2}{(k+l)(l+m)(m+k)}.$$

Do đó, ta cần chứng minh
$$\frac{h-k}{\overline{h}-\overline{k}} = \frac{2l^2m^2}{k^2}.$$

Ta có
$$\begin{aligned} h - k &= \frac{2\left[k^2l^2 + l^2m^2 + m^2k^2 + klm(k+l+m)\right]}{(k+l)(l+m)(m+n)} - k \\ &= \frac{k^2l^2 + 2l^2m^2 + m^2k^2 + k^2lm + klm^2 - k^3l - k^3m - k^2lm}{(k+l)(l+m)(m+n)} \\ &= \frac{klm(k+l+m) - k^2(k+l+m) + k^2l^2 + 2l^2m^2 + l^2m^2}{(k+l)(l+m)(m+n)} \\ &= \frac{(kl+lm+mk)^2 + l^2m^2}{(k+l)(l+m)(m+n)} = \frac{(kl+lm+mk)^2\left[(k+l+m)^2 + k^2\right]}{(k+l+m)^2(k+l)(l+m)(m+n)}. \end{aligned}$$

Vì thế $\overline{h}-\overline{k}=\frac{(k+l+m)^2+k^2}{(k+l)(l+m)(m+k)}$ nên

$$\frac{h-k}{\overline{h}-\overline{k}}=\frac{(kl+lm+mk)^2}{(k+l+m)^2}=\frac{l^2m^2}{k^2}.$$

Từ đây suy ra điều phải chứng minh. □

Ví dụ 19 (IMO, 2000). *Cho tam giác ABC nhọn có AH_1, BH_2, CH_3 là các đường cao. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại T_1, T_2, T_3. Gọi l_1, l_2, l_3 lần lượt là các đường thẳng đối xứng với H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 qua các đường thẳng T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2. Chứng minh rằng các đường thẳng l_1, l_2, l_3 cắt nhau tại các điểm thuộc đường tròn nội tiếp tam giác ABC.*

Chứng minh. Giả sử đường tròn nội tiếp tam giác ABC là đường tròn đơn vị. Khi đó các điểm t_1, t_2, t_3 lần lượt biểu diễn các tiếp điểm T_1, T_2, T_3. Khi đó $c=\frac{2t_1t_2}{t_1+t_2}$. Chúng ta cần xác định tọa độ của h_3. Do $h_3t_3\perp it_3$ nên $\frac{h_3-t_3}{\overline{h_3}-\overline{t_3}}=-\frac{t_3-i}{\overline{t_3}-\overline{i}}=-t_3^2$, suy ra

$$\overline{h_3}=\frac{2t_3-h_3}{t_3^2}.$$

Ta cũng có $ch_3\parallel it_3$ nên

$$\frac{h_3-c}{\overline{h_3}-\overline{c}}=-\frac{t_3-i}{\overline{t_3}-\overline{i}}=t_3^2.$$

Suy ra

$$h_3=\frac{1}{2}(2t_3+c-\overline{c}t_3^2)=t_3+\frac{t_1t_2-t_3^2}{t_1+t_2}.$$

Tương tự, ta cũng có

$$h_2=t_2+\frac{t_1t_3-t_2^2}{t_1+t_3}.$$

Tiếp theo, ta cần xác định các điểm đối xứng với h_2, h_3 qua t_2t_3, giả sử các điểm này là p_2, p_3 và h_2', h_3' là chân các đường vuông góc kẻ từ h_2, h_3 xuống t_2t_3.

Ta có $h_2'=\frac{1}{2}(t_2+t_3-t_2t_3\overline{h_3})$ nên

$$p_2=2h_2'-h_2=\frac{t_1(t_2^2+t_3^2)}{t_2(t_1+t_3)}.$$

Tương tự, ta cũng có

$$p_3=\frac{t_1(t_2^2+t_3^2)}{t_3(t_1+t_2)}.$$

Suy ra

$$p_2-p_3=\frac{t_1^2(t_2^2+t_3^2)(t_3-t_2)}{t_2t_3(t_1+t_2)(t_1+t_3)}.$$

Dễ thấy rằng nếu x thuộc p_2p_3 thì

$$\frac{x-p_2}{\overline{x}-\overline{p_2}}=\frac{p_2-p_3}{\overline{p_2}-\overline{p_3}}=-t_1^2.$$

Nếu x thuộc đường tròn đơn vị thì $\overline{x}=\frac{1}{x}$, suy ra phương trình tương ứng biểu diễn cho nó là

$$t_2t_3x^2-t_1(t_2^2+t_3^2)x+t_1^2t_2t_3=0.$$

Phương trình này có hai nghiệm là $x_1 = \frac{t_1t_2}{t_3}$ và $x_2 = \frac{t_1t_3}{t_2}$, và đây chính là giao điểm của đường thẳng p_2p_3 với đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Tương tự, ta cũng xác định được giao điểm của p_1p_2 và p_3p_1 của đường tròn (I) lần lượt là

$$y_1 = \frac{t_1t_2}{t_3}, \quad y_2 = \frac{t_2t_3}{t_1}$$

và

$$z_1 = \frac{t_2t_3}{t_1}, \quad z_2 = \frac{t_3t_1}{t_2}.$$

Từ giao điểm chung của các cặp đường thẳng trong các đường p_1p_2, p_2p_3, p_3p_1 nằm trên đường tròn nội tiếp (I) nên ta có điều phải chứng minh. □

Qua các ví dụ này, ta thấy rằng cần phải phân tích kỹ vấn đề và xem xét điều kiện giả thiết cho có thuận lợi hay không để tính toán tọa độ các điểm. Bài toán sẽ được giải nhanh chóng bằng cách này nếu chỉ có đường tròn nội tiếp, các tiếp điểm của nó với cạnh tam giác, các trọng tâm, đường tròn ngoại tiếp, trực tâm cùng một số điểm đơn giản khác. Phương pháp số phức cũng như các phương pháp đã nêu, sẽ không hiệu quả nếu bài toán cho nhiều đường tròn hoặc tập trung vào xem xét các góc, các vị trí tương đối của đường tròn, ... Điều này cho thấy rằng việc lựa chọn chính xác một phương pháp để giải quyết bài toán là điều hết sức quan trọng!

3 Một số bài toán nổi tiếng

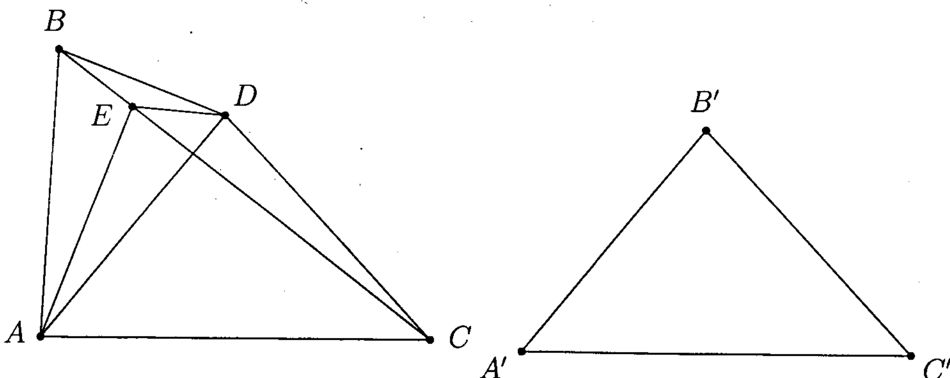
3.1 Bài toán tam giác có hai phân giác bằng nhau

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC có hai phân giác trong là BD và CE bằng nhau. Chứng minh tam giác này cân tại A.*

Chứng minh. (a) *Cách 1.* Trước hết, ta cần chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề 1. *Nếu hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau từng đôi một nhưng góc xen giữa chúng không bằng nhau thì các cạnh đối diện cũng không bằng nhau và cạnh đối diện với góc góc lớn hơn là cạnh lớn hơn.*

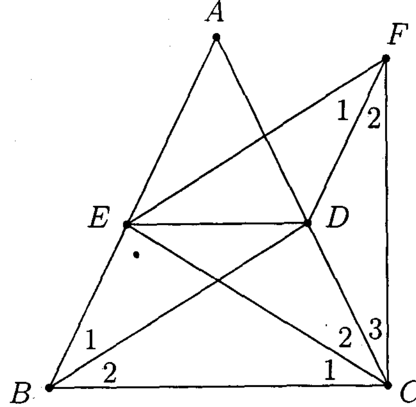
Chứng minh. Xét hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle A > \angle A'$, ta cần chứng minh rằng $BC > B'C'$. Ta dựng điểm D nằm trong $\angle BAC$ sao cho $AD = A'B'$, $\angle CAD = \angle C'A'B$, suy ra $\triangle A'B'C' = \triangle ADC$ và $B'C' = CD$. Gọi E là giao điểm của phân giác $\angle BAD$ với cạnh BC.



Xét hai tam giác $\triangle ABE$, $\triangle ADE$ có AE là cạnh chung, $\angle EAB = \angle EAD$, $AB = AD$ nên hai tam giác này bằng nhau, suy ra $BE = DE$. Theo bất đẳng thức tam giác trong tam giác CDE, ta có $DE + CE > DE$. Do đó

$$BC = BE + CE = DE + CE > CD = B'C'.$$

Bổ đề được chứng minh. ■



Trở lại bài toán. Xét tam giác ABC có hai phân giác BD và CE bằng nhau. Ta sẽ giải quyết bài toán này bằng phản chứng. Giả sử $\angle B > \angle C$ thì $\angle B_1 > \angle C_1$, áp dụng bổ đề vừa chứng minh vào hai tam giác BCD và CBE, ta có $CD > BE$.

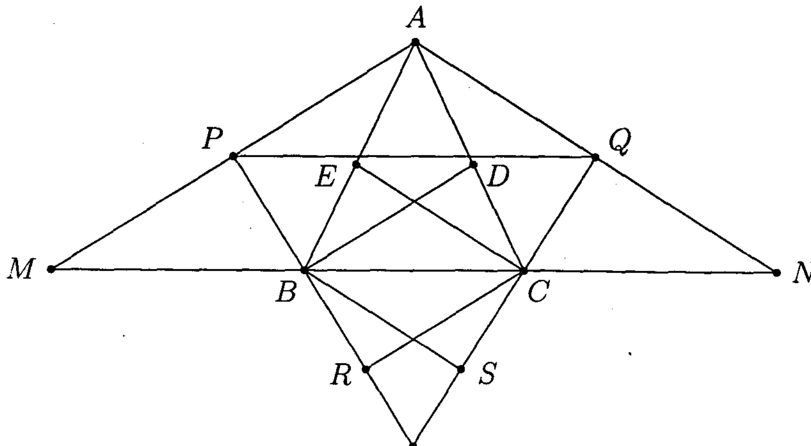
Gọi F là giao điểm của đường thẳng qua E, song song với BD và qua D, song song với BE, ta có $\angle F_1 = \angle B_2 = \angle B_1$. Do $\triangle BDE = \triangle FED$ (g.c.g) nên

$$EF = BD = CE, \quad DF = BE < CD, \quad \angle F_1 = \angle B_2 > \angle C_2.$$

Tam giác CEF có $EF = CE$ nên cân tại E.

Xét tam giác CDF có $CD > DF$ nên $\angle F_2 > \angle C_3$, mà $\angle F_1 > \angle C_2$ nên $\angle EFC > \angle ECF$. Điều mâu thuẫn này dẫn đến điều giả sử ban đầu là sai. Tương tự với $\angle B < \angle C$ cũng xảy ra mâu thuẫn. Vậy ta phải có $\angle B = \angle C$, hay tam giác ABC cân tại A. □

(b) *Cách 2.* Gọi M, N lần lượt là các điểm đối xứng với A qua phân giác ngoài của tam giác ABC tại B và C. Khi đó, rõ ràng M, N thuộc BC. Giả sử AM cắt phân giác ngoài góc B tại P, AN cắt phân giác ngoài góc C tại Q. Gọi R là hình chiếu của C trên đường thẳng BP, S là hình chiếu của B trên đường thẳng CQ.



Dễ thấy các tam giác ABM, ACN cân nên P, Q lần lượt là trung điểm của AM, AN; tức là PQ là đường trung bình của tam giác AMN và $PQ \parallel BC$.

Ta biết rằng hai tam giác có chung đáy và đỉnh còn lại nằm trên cùng một đường thẳng song song với đáy thì diện tích của chúng bằng nhau.

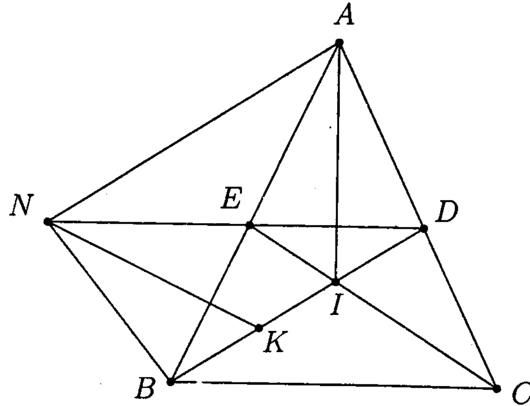
Từ $AP \parallel BD \parallel CR$ (cùng vuông góc với BP) , ta có $S_{PBD} = S_{ABD}$, $S_{RBD} = S_{CBD}$, suy ra

$$S_{PDR} = S_{PBD} + S_{RBD} = S_{SBD} + S_{CBD} = S_{ABC}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $S_{ESQ} = S_{ABC}$. Suy ra hệ thức $S_{PDR} = S_{ESQ}$ tương đương với $\frac{1}{2}BD \cdot PR = \frac{1}{2}CE \cdot SQ$, hay $PR = SQ$ (do $BD = CE$).

Tứ giác $BCSR$ có $\angle BSC = \angle BRC = 90^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp, mà $PQ \parallel BC$ nên tứ giác $PQSR$ cũng nội tiếp. Ta lại có $PR = SQ$ nên tứ giác này là hình thang cân (dễ thấy tứ giác này không thể là hình bình hành). Suy ra $\angle RPQ = \angle SQP$ hay $\angle PBM = \angle QCM$. Từ đó dễ dàng có được $\angle ABC = \angle ACB$ hay tam giác ABC cân tại A. □

(c) *Cách 3.* Dựng điểm N phía ngoài tam giác thỏa mãn $ND = AC$, $BN = AE$. Khi đó, dễ thấy rằng $\triangle NBD = \triangle AEC$ (c.c.c) nên $\angle BND = \angle EAC$ hay tứ giác $ANBD$ nội tiếp.



Gọi I là giao điểm của BD và CE, NK lần lượt là các phân giác trong của tam giác NBD thì $AI = NK$. Ta có

$$\angle AIK + \angle ANK = \left(\frac{1}{2}\angle BAC + \angle ADI\right) + \left(\angle ANB - \frac{1}{2}\angle BND\right) = \angle ADI + \angle ANB = 180^\circ,$$

nên tứ giác $AIKN$ cũng nội tiếp. Hơn nữa, tứ giác này có hai cạnh bên bằng nhau nên là hình thang cân. Suy ra $ANBD$ cũng là hình thang cân và do $AB = DN = AC$ nên tam giác ABC cân tại A. □

(c) *Cách 4.* Gọi độ dài các cạnh của tam giác là $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ và p là nửa chu vi thì theo công thức tính độ dài đường phân giác, ta có

$$BD = \frac{2\sqrt{pac(p-b)}}{a+c}, \quad CE = \frac{2\sqrt{pab(p-c)}}{a+b}.$$

Do đó, từ giả thiết, ta được

$$\frac{2\sqrt{pac(p-b)}}{a+c} = \frac{2\sqrt{pab(p-c)}}{a+b}.$$

Bình phương hai vế và thay $p = \frac{a+b+c}{2}$, ta có

$$c(a+c-b)(a+b)^2 = b(a+b-c)(a+c)^2,$$

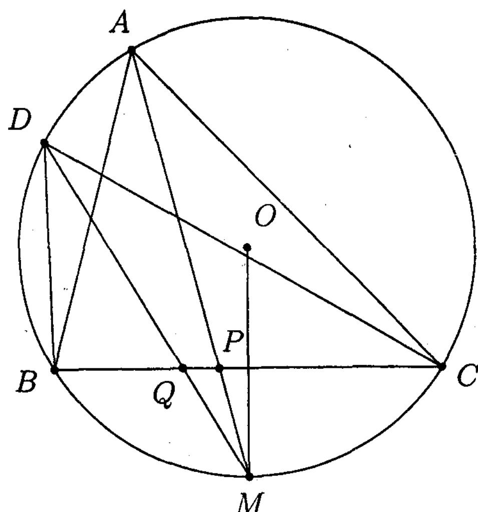
hay

$$(b-c)\left[a^3 + 3abc + (a^2+bc)(b+c)\right] = 0.$$

Từ đây suy ra $b = c$. Và do đó, tam giác ABC cân tại A. □

(d) *Cách 5.* Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng hai tam giác có hai cạnh bằng nhau, hai góc ở đỉnh và độ dài hai phân giác tương ứng cũng bằng nhau thì hai tam giác đó bằng nhau.

Xét hai tam giác ABC và DEF có $BC = EF$, $\angle A = \angle D$ và hai phân giác tương ứng là AP và DQ bằng nhau. Đặt các tam giác ABC và DEF trong mặt phẳng sao cho cạnh BC trùng với EF, các góc A và D cùng nằm trên một cung chứa góc dựng trên cạnh BC. Gọi M là trung điểm cung BC không chứa A, D thì AP và DQ cùng đi qua M.



Giả sử D không trùng với A hoặc không đối xứng với A qua trùng trực BC. Ta có thể giả sử D thuộc cung nhỏ AB. Khi đó độ dài cũng MD bé hơn độ dài cung MA nên $MD < MA$, mà $AQ = DQ$ nên $MQ < MP$, mâu thuẫn với độ dài các hình chiếu tương ứng của hai đường xiên này. Do đó, điều giả sử là sai hay D trùng với A hoặc đối xứng với A qua trùng trực BC, tức là hai tam giác ABC và DEF bằng nhau. Áp dụng trực tiếp kết quả này vào hai tam giác ABD, ACE với phân giác chung là AI, ta có ngay đpcm. □

Ngoài ra, còn nhiều cách chứng minh khác mà trong đó có cách của nhà Toán học người Mỹ là Charlie Silver, đưa ra trong năm 2010 vừa qua, đã dùng định nghĩa về sự bằng nhau của hai đối tượng để có một cách chứng minh trực tiếp và nhanh gọn cho định lý này. Bài toán này còn có thể mở rộng ra bằng cách thay D, E là chân các phân giác góc B, C thành giao điểm của BK, CK với AC, AB khi K là một điểm bất kỳ trên đường phân giác góc A hoặc các bài toán liên quan đến đường phân giác ngoài.

3.2 Bài toán đường thẳng chia đôi chu vi và diện tích

Trong phần này, chúng ta sẽ tìm hiểu về một bài toán dựng đường thẳng chia đôi chu vi và diện tích của tam giác. Bài toán này đã được giải quyết hoàn toàn bởi phương pháp đại số nhưng do sự liên quan chặt chẽ đến đường phân giác trong tam giác mà phương pháp hình học thuần túy đã giúp chúng ta nhìn nhận được rõ hơn vẻ đẹp thú vị của bài toán này.

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC. Hãy dựng đường thẳng chia đôi chu vi và diện tích của nó.*

Lời giải. (a) *Cách 1.* Giả sử đường thẳng d là đường thẳng cần tìm và nó cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N. Gọi I là giao điểm của phân giác trong góc A với d.

Trước hết, ta cần chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác nằm trên d. Do chu vi tứ giác $BMNC$ và tam giác AMN bằng nhau nên

$$BM + MN + NC + BC = AM + MN + NA,$$

hay tương đương

$$BM + NC + BC = AM + AN.$$

Vì I nằm trên phân giác góc A nên chiều cao kẻ từ I đến AB, AC bằng nhau. Gọi d_a, d_b, d_c lần lượt là khoảng cách từ I đến BC, CA, AB thì $d_b = d_c = d$. Tứ giác $BMNC$ có cùng diện tích với $\triangle AMN$ nên

$$S_{IAM} + S_{IAN} = S_{IMB} + S_{IBC} + S_{ICN},$$

hay là

$$AM + AN = BM + CN + \frac{d_a}{d}BC.$$

So sánh hai đẳng trên, ta có $d = d_a$ hay I cách đều các cạnh của tam giác và nó là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh sự tồn tại của d. Xét tam giác ABC có chu vi $2p$ và độ dài các cạnh thỏa $a \geqslant b \geqslant c$. Khi đó, dễ thấy đường thẳng d phải cắt BC, BA; giả sử giao điểm của chúng là M, N. Đặt $BN = x$, $0 \leqslant x \leqslant c$, đồng thời

$$BM = p - x, \quad 0 \leqslant p - x \leqslant a. \tag{1}$$

Diện tích tam giác AMN bằng nửa diện tích tam giác ABC nên $x(p-x) = \frac{1}{2}ac$, hay

$$2x^2 - 2px + ac = 0. \tag{2}$$

Phương trình bậc hai này có

$$\Delta' = p^2 - 2ac = \frac{(a+b+c)^2 - 8ac}{4} \geqslant \frac{(a+2c)^2 - 8ac}{4} = \frac{(a-2c)^2}{4} \geqslant 0.$$

Do đó, phương trình (2) có hai nghiệm là

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(p + \sqrt{p^2 - 2ac}\right), \quad x_2 = \frac{1}{2}\left(p - \sqrt{p^2 - 2ac}\right).$$

Ta chỉ cần chứng minh một trong hai nghiệm này thỏa mãn điều kiện (1) là được.

- *Xét nghiệm* $x_1 = \frac{1}{2}\left(p + \sqrt{p^2 - 2ac}\right)$. Rõ ràng $x_1 > 0$, và $x_1 \leqslant c$ tương đương

$$\sqrt{p^2 - 2ac} \leqslant 2c - p.$$

  - Nếu tam giác đã cho có $2c - p < 0$ thì trường hợp này không thỏa.
  - Nếu tam giác đã cho có $2c - p \geqslant 0$ thì điều kiện trên biến đổi thành $c \geqslant b$, mà tam giác ta xét là $b \geqslant c$ nên chỉ có tam giác cân là thỏa mãn trường hợp này và tam giác cân đó thỏa mãn điều kiện $a \geqslant b = c \geqslant \frac{a+b+c}{2}$.

- *Xét* $x_2 = \frac{1}{2}\left(p - \sqrt{p^2 - 2ac}\right)$. Dễ thấy rằng ta cũng có $x_2 > 0$, và $x_1 \leqslant c$ tương đương

$$\sqrt{p^2 - 2ac} \geqslant 2c - p.$$

  - Nếu tam giác đã cho có $2c < p$ thì trường hợp này luôn thỏa mãn.
  - Nếu tam giác đã cho có $2c - p \geqslant 0$ thì điều kiện trên biến đổi thành $b \geqslant c$ đúng.

Dễ dàng kiểm tra được điều kiện $0 \leqslant p - x \leqslant a$ cũng đúng nên với nghiệm x_2 thì điều kiện (1) được thỏa mãn và ta chỉ quan tâm đến nghiệm này. Cuối cùng, ta chỉ cần dựng được đại lượng $x_2 = \frac{1}{2}\left(p - \sqrt{p^2 - 2ac}\right)$ là bài toán kết thúc.

Ta thấy rằng chỉ cần dựng đoạn thẳng có giá trị $\sqrt{p^2 - 2ac}$. Ta dựng hình chữ nhật có diện tích là $p^2 - 2ac$; dựng trung bình nhân của kích thước hai cạnh hình chữ nhật (dựng tam giác vuông nhận độ dài hai kích thước làm độ dài hình chiếu của hai cạnh góc vuông lên cạnh huyền, khi đó độ dài đường cao của tam giác này chính là trung bình nhân độ dài hai kích thước). Bài toán trên theo cách tiếp cận bằng Đại số đã được giải quyết trọn vẹn. □

(b) *Cách 2.* Để tìm một cách dựng hình thuần túy hơn, ta cần dùng một số bổ đề sau

Bổ đề 2. *Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp. Gọi M là một điểm di động trên đường thẳng AB và N là giao điểm của IM với đường thẳng AC. Khi đó, trung điểm K của MN di chuyển trên hyperbol có hai tiêu điểm là A và I.*

Bổ đề 3. *Cho tam giác ABC có D, E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C với các cạnh đối diện. Gọi X, Y, Z lần lượt là trung điểm của AD, BE, CF. Chứng minh rằng với mọi điểm M, N nằm trên các cạnh của tam giác ABC và chia đôi chu vi của nó thì trung điểm MN luôn nằm trên các cạnh của tam giác XYZ.*

Bổ đề 4. *Cho đường tròn (O) và điểm A bất kỳ nằm ngoài đường tròn. Từ A, dựng hai tiếp tuyến đến (O), hai tiếp điểm lần lượt là B và C. Gọi M là một điểm bất kỳ thuộc (O). Ta có*

$$d(M, AB) \cdot d(M, AC) = d^2(M, BC).$$

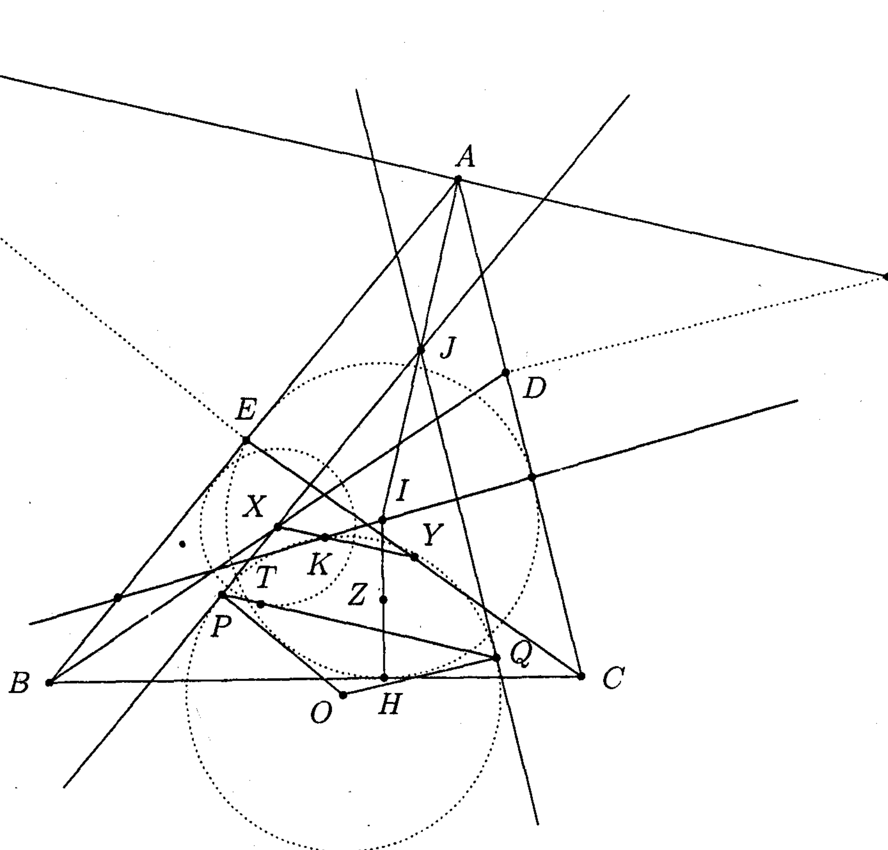
Bổ đề 2 đã được chứng minh đầy đủ ở phần thứ nhất, các bổ đề 3, 4 quen thuộc nên xin dành cho bạn đọc. Ta thấy rằng đường thẳng cần dựng đã đi qua tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC nên ta chỉ cần xác định thêm một điểm nữa nằm trên nó là đủ.

Giả sử đường thẳng này cắt hai cạnh tam giác tại M, N và K là trung điểm của nó. Ta sẽ tìm cách dựng điểm K.

Theo bổ đề 3 thì K thuộc các cạnh của tam giác có đỉnh là trung điểm các đoạn thẳng nối đỉnh tam giác ABC với tiếp điểm đường tròn bàng tiếp cạnh đối diện.

Theo bổ đề 2 thì ta thấy rằng điểm K phải thỏa mãn điều kiện là 4 lần tích các khoảng cách từ K đến hai đường thẳng qua trung điểm AI và song song với AB, AC bằng bình phương bán kính đường tròn nội tiếp.

Do đó ta chỉ cần dựng điểm K thỏa mãn hai điều kiện trên là có được đường thẳng chia đôi chu vi và diện tích của tam giác ABC cần tìm.



Giả sử đường thẳng cần dựng cắt hai cạnh AB và AC của tam giác ABC. Từ các đặc điểm này của K, ta có các bước dựng như sau:

- Dựng hai đường tròn bàng tiếp góc B, C và hai tiếp điểm tương ứng lên các cạnh đối diện là D và E.
- Dựng trung điểm X, Y lần lượt của BD và CE.
- Dựng đường tròn nội tiếp tâm I của tam giác ABC. Đường tròn tiếp xúc BC tại H. Dựng Z là trung điểm IH.
- Dựng J là trung điểm AI. Dựng đường qua J lần lượt song song với AB và AC, gọi các đường thẳng này lần lượt là x và y.
- Dựng đường tròn tâm X, bán kính IZ. Dựng đường thẳng vuông góc XY tại X. Hai đường này cắt nhau tại T.
- Dựng đường thẳng qua T song song với XY. Đường thẳng này lần lượt cắt x và y lần lượt tại P và Q.
- Dựng đường thẳng qua P và vuông góc JP cắt đường thẳng qua Q, vuông góc với JQ tại O.
- Dựng đường tròn tâm O, bán kính OP cắt XY tại K.
- Dựng đường IK chính là đường thẳng cần dựng.

Dễ dàng kiểm tra được các bước dựng này thực sự tạo ra đường thẳng cần tìm. Cách dùng phương pháp Hình học thuần túy này đã giúp cho bài toán rõ ràng hơn và giúp chúng ta thấy rõ bản chất của đường thẳng chia đôi chu vi, diện tích tam giác này hơn. □

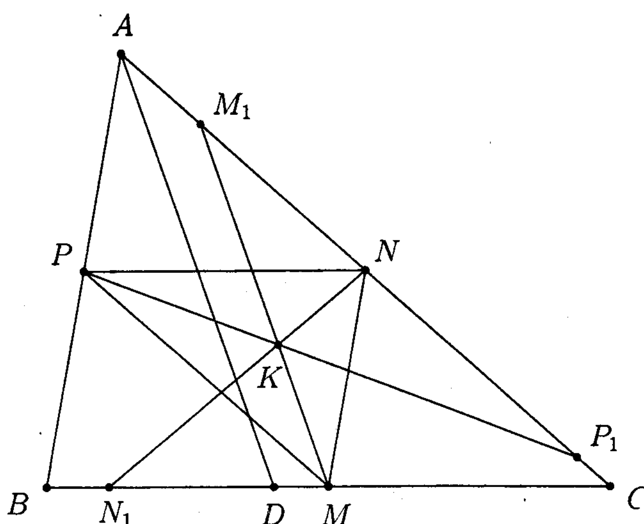
Tiếp theo, chúng ta sẽ xem xét một số bài toán có liên quan về việc chia đôi chu vi và diện tích tam giác.

Ví dụ 20 (Việt Nam, 2003). *Trên các cạnh của $\triangle ABC$ lấy các điểm M_1, N_1, P_1 sao cho các đoạn MM_1, NN_1, PP_1 chia đôi chu vi tam giác, trong đó M, N, P lần lượt là trung điểm của các đoạn BC, CA, AB. Chứng minh rằng*

(a) *Các đường thẳng MM_1, NN_1, PP_1 đồng quy tại một điểm. Gọi điểm đó là K.*

(b) *Trong các tỉ số $\frac{KA}{BC}$, $\frac{KB}{CA}$, $\frac{KC}{AB}$ có ít nhất một tỉ số không nhỏ hơn $\frac{1}{\sqrt{3}}$.*

Chứng minh.



(a) Nếu $\triangle ABC$ đều thì các điểm M_1, N_1, P_1 lần lượt trùng với các đỉnh A, B, C của $\triangle ABC$ nên rõ ràng các đoạn MM_1, NN_1, PP_1 đồng quy. Xét trường hợp $\triangle ABC$ không đều, khi đó có hai cạnh của tam giác không bằng nhau, giả sử $AB < AC$. Khi đó, do MM_1 chia đôi chu vi $\triangle ABC$ nên M_1 phải nằm trên cạnh AC và $AB + AM_1 = CM_1$, hay

$$\frac{CM_1}{AC} = \frac{AB + AC}{2AC}.$$

Mặt khác, gọi AD là phân giác góc A thì theo tính chất đường phân giác, ta có $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ nên

$$\frac{BC}{DC} = \frac{AB + AC}{AC}.$$

Do $BC = 2MC$ nên đẳng thức trên có thể viết lại thành

$$\frac{MC}{DC} = \frac{AB + AC}{2AC}.$$

Từ đây ta suy ra $\frac{CM_1}{AC} = \frac{MC}{DC}$. Sử dụng định lý Thalès đảo, ta được $MM_1 \parallel AD$. Do $MP \parallel AC$ và $MN \parallel AB$ nên $\angle P_1MM_1 = \angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\angle NMP$, suy ra MM_1 là phân giác của góc $\angle NMP$. Tương tự, ta có NN_1, PP_1 cũng là các đường phân giác của $\triangle MNP$. Do đó MM_1, NN_1, PP_1 đồng quy tại tâm đường tròn nội tiếp của tam giác MNP.

(b) Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$, ta có

$$\begin{aligned}KA^2+KB^2+KC^2 &= \left(\overrightarrow{KG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{KG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{KG}+\overrightarrow{GC}\right)^2\\ &= 3KG^2+(GA^2+GB^2+GC^2)+2\overrightarrow{KG}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)\\ &= 3KG^2+\frac{1}{3}(AB^2+BC^2+CA^2).\end{aligned}$$

Suy ra

$$KA^2+KB^2+KC^2 \geqslant \frac{1}{3}(AB^2+BC^2+CA^2).$$

Giả sử cả ba tỉ số $\frac{KA}{BC}$, $\frac{KB}{CA}$, $\frac{KC}{AB}$ đều bé hơn $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Khi đó, ta sẽ có

$$KA^2+KB^2+KC^2 < \frac{1}{3}(AB^2+BC^2+CA^2).$$

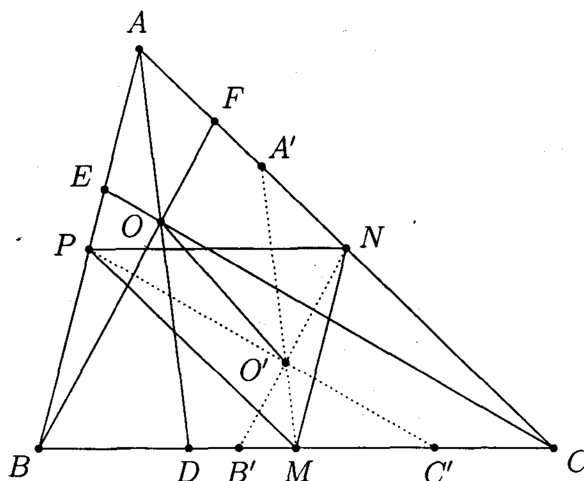
Mâu thuẫn. Từ đây ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Điểm K ở trên chính là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MNP và là tâm Spieker của tam giác ABC đã cho. Bài toán này có thể giải bằng cách kẻ đường phụ như sau: Trên tia đối của AC, lấy điểm B' sao cho $AB = AB'$ thì điểm cần dựng chính là trung điểm của CB'. Từ tính chất các đường trung bình, ta có điều phải chứng minh.

Nếu đổi giả thiết chia đôi chu vi thành chia đôi diện tích thì ta có bài toán dưới đây.

Ví dụ 21. *Cho $\triangle ABC$ có M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB và m_A, m_B, m_C lần lượt là độ dài trung tuyến ứng với các đỉnh A, B, C. Gọi D, E, F là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho AD, BE, CF đồng quy tại O nằm trong $\triangle ABC$ (không trùng với các đỉnh). Gọi A', B', C' là các điểm nằm trên các cạnh của $\triangle ABC$ sao cho các đoạn DA', EB', FC' chia đôi diện tích của $\triangle ABC$. Chứng minh rằng MA', NB', PC' cùng đi qua một điểm và nếu gọi điểm đó là O' thì $OO' < \max\{m_A, m_B, m_C\}$.*

Chứng minh.



Trước hết, ta sẽ tìm cách dựng các điểm A', B', C' thỏa mãn đề bài. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $AB \leqslant BC \leqslant CA$. Khi đó điểm A' thỏa mãn giả thiết DA' chia đôi diện tích $\triangle ABC$ phải nằm trên cạnh AC.

Qua M dựng đường thẳng song song với AD cắt AC tại A'. Dễ thấy $S_{AMD} = S_{AA'D}$, suy ra

$$S_{A'DC} = (S_{A'DC} + S_{AA'D}) - S_{AMD} = S_{AMC} = \frac{1}{2}S_{ABC}.$$

Do đó điểm A' xác định như trên thỏa mãn đề bài. Hoàn toàn tương tự với các điểm B', C'.

Như thế, ta cần chứng minh rằng các đường thẳng lần lượt qua M, N, P và tương ứng song song với các đoạn AD, BE, CF đồng quy. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Dễ thấy rằng phép vị tự tâm G, tỉ số $-\frac{1}{2}$ biến tam giác ABC thành tam giác MNP và lần lượt biến các đường thẳng AD, BE, CF thành các đường thẳng MA', NB', PC'.

Do các đường thẳng AD, BE, CF đồng quy nên các đường thẳng MA', NB', PC' cũng đồng quy và khi đó điểm O' là ảnh của O qua phép vị tự đã nêu. Từ đó suy ra G thuộc OO' và

$$OO' = \frac{3}{2}OG.$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng

$$OG < \max\{GA, GB, GC\}.$$

Ta có nhận xét sau:

Nhận xét. *Cho tam giác XYZ và điểm T bất kỳ nằm trong tam giác và không trùng với các đỉnh. Khi đó, ta có*

$$XT < \max\{XY, XZ\}.$$

Bây giờ, ta xét điểm O trong các tam giác GBC, GCA, GAB. Theo nhận xét trên thì

$$OG < \max\big\{\max\{GA, GB\}, \max\{GB, GC\}, \max\{GC, GA\}\big\} = \max\{GA, GB, GC\}.$$

Từ đây đưa đến

$$OO' = \frac{3}{2}OG < \frac{3}{2}\max\{GA, GB, GC\} = \max\{m_A, m_B, m_C\}.$$

Bài toán được chứng minh xong. □

3.3 Bài toán dựng tam giác từ chân các đường phân giác

Các bài toán dựng hình trước nay vẫn luôn thể hiện một tầm quan trọng đáng kể khi mà từ các bước dựng hình, vấn đề đặt ra được sáng sủa hơn. Trong lịch sử Hình học, đã có nhiều bài toán dựng hình khó và thách thức rất nhiều thế hệ các nhà Toán học như dựng đường tròn tiếp xúc với cả ba đường tròn cho trước hoặc trực giao với cả ba đường tròn cho trước, dựng một tam giác nội tiếp đường tròn có các cạnh đi qua những điểm cho trước, ... Bài toán dựng hình từ các trung điểm các cạnh hoặc chân các đường cao trong tam giác thì thuộc dạng cơ bản và có thể giải quyết dễ dàng bằng các kiến thức THCS. Tuy nhiên, nhiều câu hỏi được đặt ra khi tìm một sự tương tự khi dựng một tam giác khi biết chân các đường phân giác trong của nó, một bài toán tưởng chừng như đơn giản. Trên thực tế, bài toán dựng hình này không đơn giản và có lẽ chưa có một phương pháp Hình học thuần túy nào giải quyết trọn vẹn nó.

Bảng dưới đây được xây dựng bởi nhà Toán học Wernick năm 1982 về các bộ ba các điểm có khả năng dựng được một tam giác (ba trong các điểm quen thuộc là tâm đường tròn ngoại tiếp O, tâm đường tròn nội tiếp I, trọng tâm G, trực tâm H, chân các đường phân giác T_a, T_b, T_c, chân các đường cao H_1, H_2, H_3 và trung điểm các cạnh M_1, M_2, M_3). Trong đó bài toán mà chúng ta đang xét là vấn đề thứ 138 mà ông chưa giải quyết được. Trong phần này, chúng ta sẽ xem xét bài toán này cùng cách tiếp cận bằng đại số thông qua hệ tọa độ tỉ cự.

1. A, B, O	L	29. A, M_b, G	S	57. A, H, I		85. M_a, M_b, H_a	S	113. M_a, T_b, T_c	
2. A, B, M_a	S	30. A, M_b, H_a	L	58. A, T_a, T_b		86. M_a, M_b, H_c	S	114. M_a, T_b, I	
3. A, B, M_c	R	31. A, M_b, H_b	L	59. A, T_a, I	L	87. M_a, M_b, H		115. G, H_a, H_b	
4. A, B, G	S	32. A, M_b, H_c	L	60. A, T_b, T_c	S	88. M_a, M_b, T_a		116. G, H_a, H	S
5. A, B, H_a	L	33. A, M_b, H	S	61. A, T_b, I	S	89. M_a, M_b, T_c		117. G, H_a, T_a	S
6. A, B, H_c	L	34. A, M_b, T_a	S	62. O, M_a, M_b	S	90. M_a, M_b, I		118. G, H_a, T_b	
7. A, B, H	S	35. A, M_b, T_b	L	63. O, M_a, G	S	91. M_a, G, H_a	L	119. G, H_a, I	
8. A, B, T_a	S	36. A, M_b, T_c	S	64. O, M_a, H_a	L	92. M_a, G, H_b	S	120. G, H, T_a	
9. A, B, T_c	L	37. A, M_b, I	S	65. O, M_a, H_b	S	93. M_a, G, H	S	121. G, H, I	
10. A, B, I	S	38. A, G, H_a	L	66. O, M_a, H	S	94. M_a, G, T_a	S	122. G, T_a, T_b	
11. A, O, M_a	S	39. A, G, H_b	S	67. O, M_a, T_a	L	95. M_a, G, T_b		123. G, T_a, I	
12. A, O, M_b	L	40. A, G, H	S	68. O, M_a, T_b		96. M_a, G, I		124. H_a, H_b, H_c	S
13. A, O, G	S	41. A, G, T_a	S	69. O, M_a, I	S	97. M_a, H_a, H_b	S	125. H_a, H_b, H	S
14. A, O, H_a	S	42. A, G, T_b		70. O, G, H_a	S	98. M_a, H_a, H	L	126. H_a, H_b, T_a	S
15. A, O, H_b	S	43. A, G, I		71. O, G, H	R	99. M_a, H_a, T_a	L	127. H_a, H_b, T_c	
16. A, O, H	S	44. A, H_a, H_b	S	72. O, G, T_a		100. M_a, H_a, T_b		128. H_a, H_b, I	
17. A, O, T_a	S	45. A, H_a, H	L	73. O, G, I		101. M_a, H_a, I	S	129. H_a, H, T_a	L
18. A, O, T_b	S	46. A, H_a, T_a	L	74. O, H_a, H_b		102. M_a, H_b, H_c	S	130. H_a, H, T_b	
19. A, O, I	S	47. A, H_a, T_b	S	75. O, H_a, H	S	103. M_a, H_b, H	S	131. H_a, H, I	
20. A, M_a, M_b	S	48. A, H_a, I	S	76. O, H_a, T_a	S	104. M_a, H_b, T_a	S	132. H_a, T_a, T_b	
21. A, M_a, G	R	49. A, H_b, H_c	S	77. O, H_a, T_b		105. M_a, H_b, T_b	S	133. H_a, T_a, I	S
22. A, M_a, H_a	L	50. A, H_b, H	L	78. O, H_a, I		106. M_a, H_b, T_c		134. H_a, T_b, T_c	
23. A, M_a, H_b	S	51. A, H_b, T_a	S	79. O, H, T_a		107. M_a, H_b, I		135. H_a, T_b, I	
24. A, M_a, H	S	52. A, H_b, T_b	L	80. O, H, I		108. M_a, H, T_a		136. H, T_a, T_b	
25. A, M_a, T_a	S	53. A, H_b, T_c	S	81. O, T_a, T_b		109. M_a, H, T_b		137. H, T_a, I	
26. A, M_a, T_b		54. A, H_b, I	S	82. O, T_a, I		110. M_a, H, I		138. T_a, T_b, T_c	
27. A, M_a, I		55. A, H, T_a	S	83. M_a, M_b, M_c	S	111. M_a, T_a, T_b		139. T_a, T_b, I	S
28. A, M_b, M_c	S	56. A, H, T_b		84. M_a, M_b, G	S	112. M_a, T_a, I	S		

Bảng trên không xét đến các bộ ba có tính chất tương đương khi dựng tam giác. Chú ý rằng, **S** ký hiệu cho các bài toán đã được giải, **L** ký hiệu cho các bài toán vô nghiệm hoặc vô số nghiệm hình, **R** ký hiệu cho các bài toán phụ thuộc vào vị trí của các điểm trong bộ ba đã cho (ví dụ, vấn đề số 71 trong bảng trên đòi hỏi ba điểm O, G, H phải thỏa mãn $\overrightarrow{HO} = \frac{3}{2}\overrightarrow{HG}$) và các bài toán còn lại là chưa có lời giải.

3.3.1 Các bổ đề và phương pháp dùng conic để dựng hình

Để bắt đầu giải quyết bài toán, trước hết, ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề 5. *Cho tam giác ABC không cân tại A. Quỹ tích các điểm Q sao cho QA là phân giác trong của góc tạo bởi QB và QC là một đường cong liên hợp đẳng giác với đường tròn Apolonius của đỉnh A..*

Chứng minh. Ta có điểm A nằm trên phân giác của góc $\angle BQC$ khi và chỉ khi

$$\cos AQB = \pm \cos AQC,$$

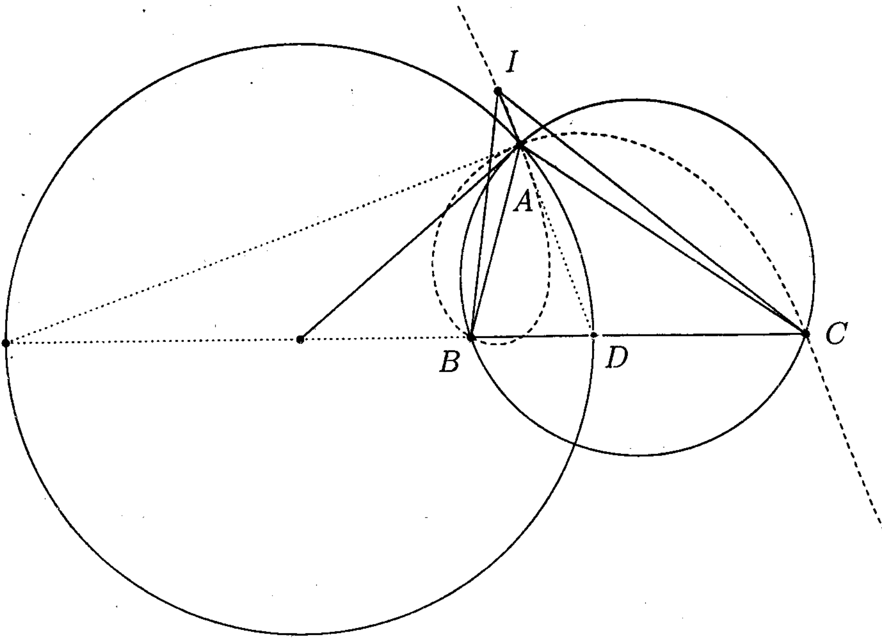
hay là

$$\frac{AQ^2 + BQ^2 - AB^2}{2AQ \cdot BQ} = \pm \frac{AQ^2 + CQ^2 - AC^2}{2AQ \cdot CQ}.$$

Bình phương hai vế và thu gọn, ta được

$$(QA^4 - QB^2QC^2)(QB^2 - QC^2) - 2QA^2(b^2QB^2 - c^2QC^2) -$$
$$- 2(b^2 - c^2)QB^2QC^2 + b^4QB^2 - c^4QC^2 = 0.$$

Xét ABC là tam giác cơ sở với hệ trục tọa độ tỉ cự, giả sử Q có tọa độ là $Q(x,\, y,\, z)$.



Ta có thể tính được

$$QA^2 = \frac{c^2y^2 + (b^2 + c^2 - a^2)yz + b^2z^2}{(x+y+z)^2},$$

Tương tự đối với QB^2, QC^2. Thay các giá trị này vào đẳng thức ở trên, ta được

$$x(c^2y^2 - b^2z^2) + yz\left[(c^2 + a^2 - b^2)y - (a^2 + b^2 - c^2)z\right] = 0. \tag{1}$$

Ta biết rằng nếu $X(x,\, y,\, z)$ là một điểm trong hệ tọa độ tỉ cự có tam giác cơ sở là ABC thì điểm $Y(a^2yz,\, b^2zx,\, c^2xy)$ hay $Y\left(\frac{a^2}{x}, \frac{b^2}{y}, \frac{c^2}{z}\right)$ chính là điểm liên hợp đẳng giác với X. Trong phương trình (1), thay $(x,\, y,\, z)$ bởi $(a^2yz,\, b^2zx,\, c^2xy)$, ta được

$$(b^2 - c^2)(a^2yz + b^2zx + c^2xy) + a^2(x+y+z)(c^2y - b^2z) = 0.$$

Đây là một đường tròn này đi qua $A(1,\, 0,\, 0)$ và $D_{1,2}(0,\, b,\, \pm c)$ là các chân đường phân giác trong và ngoài tại đỉnh A của $\triangle ABC$. Suy ra nó chính là đường tròn Apollonius đỉnh A. □

Bổ đề này chính là chìa khóa giải quyết bài toán nêu ra ban đầu.

Với tam giác ABC cho trước, ta cần dựng tam giác $A'B'C'$ nhận A, B, C là chân các đường phân giác trong hoặc ngoài. Ta thấy điểm A' như thế chính là một cách phát biểu của bổ đề trên khi thay x bởi $-x$, tức là xét $A'(-x,\, y,\, z)$. Khi đó, ta có phương trình $F_a = 0$, với

$$F_a = -x(c^2y^2 - b^2z^2) + yz\left[(c^2 + a^2 - b^2)y - (a^2 + b^2 - c^2)z\right].$$

Tương tự, ta cũng có các phương trình sau ứng với các điểm B, C' là

$$F_b = -y(a^2z^2 - c^2x^2) + zx\left[(a^2 + b^2 - c^2)z - (b^2 + c^2 - a^2)x\right]$$

và

$$F_c = -z(b^2x^2 - a^2y^2) + xy\left[(b^2 + c^2 - a^2)x - (c^2 + a^2 - b^2)y\right].$$

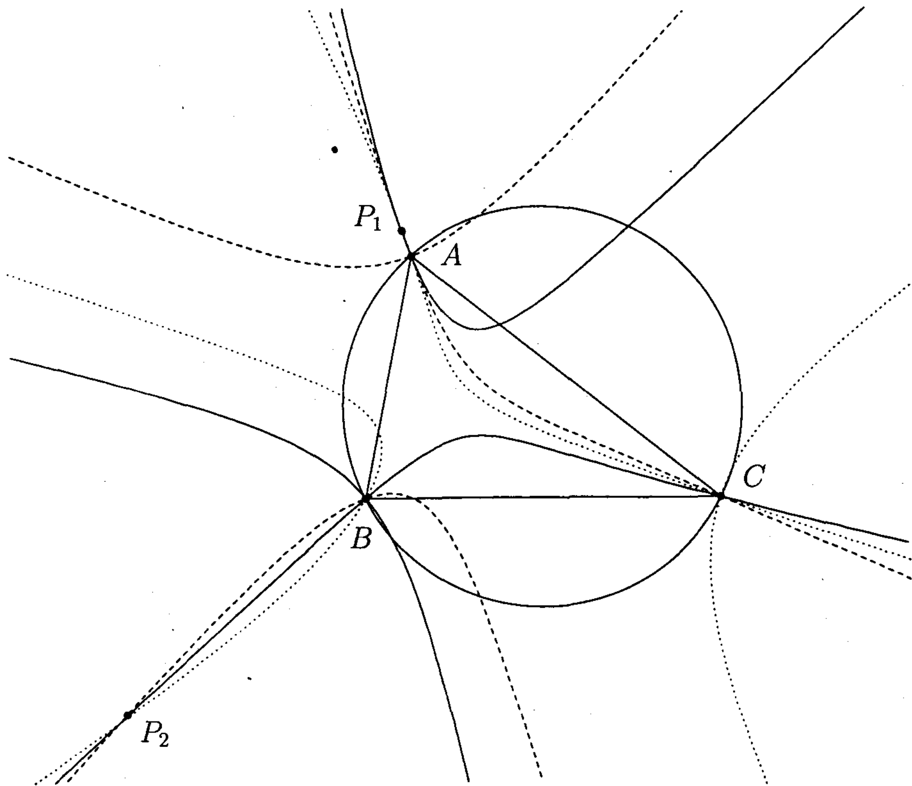
Bài toán sẽ được giải quyết nếu ta giải được hệ phương trình $F_a = F_b = F_c = 0$.

Chúng ta xét bổ đề sau.

Bổ đề 6. *Nếu ABC là tam giác không suy biến thì hệ phương trình $F_a = F_b = F_c = 0$ có ít nhất một nghiệm thực khác 0, hay luôn tồn tại một tam giác $A'B'C'$ nhận A, B, C làm chân các đường phân giác trong hoặc ngoài.*

Chứng minh. Thật vậy, trường hợp tam giác ABC đều thì bài toán hiển nhiên đúng. Giả sử tam giác ABC không đều và B là góc lớn nhất, C là góc nhỏ nhất; suy ra $B > \frac{\pi}{3} > C$. Ta thấy từ phương trình $F_a = 0$, ta có thể tính được x theo y và z, cụ thể là

$$x = \frac{yz\left((c^2+a^2-b^2)y-(a^2+b^2-c^2)z\right)}{c^2y^2-b^2z^2}.$$



Thay đại lượng trên vào các phương trình $F_b = F_c = 0$, ta được một phương trình thuần nhất với biến y và z có dạng như sau:

$$c^2((c^2+a^2-b^2)^2-c^2a^2)y^4+\cdots+b^2((a^2+b^2-c^2)^2-a^2b^2)z^4=0. \quad (1)$$

Ta thấy rằng

$$c^2\left[(c^2+a^2-b^2)^2-c^2a^2\right] = c^4a^2(2\cos 2B+1) < 0$$

và

$$b^2\left[(a^2+b^2-c^2)^2-a^2b^2\right] = a^2b^4(2\cos 2C+1) > 0.$$

Điều này chứng tỏ rằng phương trình (1) luôn có nghiệm y, $z \neq 0$, hay hệ $F_a = F_b = F_c = 0$ luôn có nghiệm thực khác 0. Bổ đề được chứng minh. □

Chú ý rằng F_a là một đường cong bậc 3 nên việc khảo sát nó tương đối khó. Ta sẽ tìm cách dựng đường cong F_a dựa trên đường liên hợp đẳng giác của nó là (C_a) với các tính chất đơn giản hơn.

Bổ đề 7. *Đường cong liên hợp đẳng giác với F_a đi qua đỉnh A, chân hai đường phân giác trong và ngoài kẻ từ A, điểm X chia đường cao AH theo tỉ số $-2:1$ cùng hai vết của X trên các cạnh AB và AC.*

Chứng minh. Ta thấy đường conic trong bổ đề nêu có phương trình là

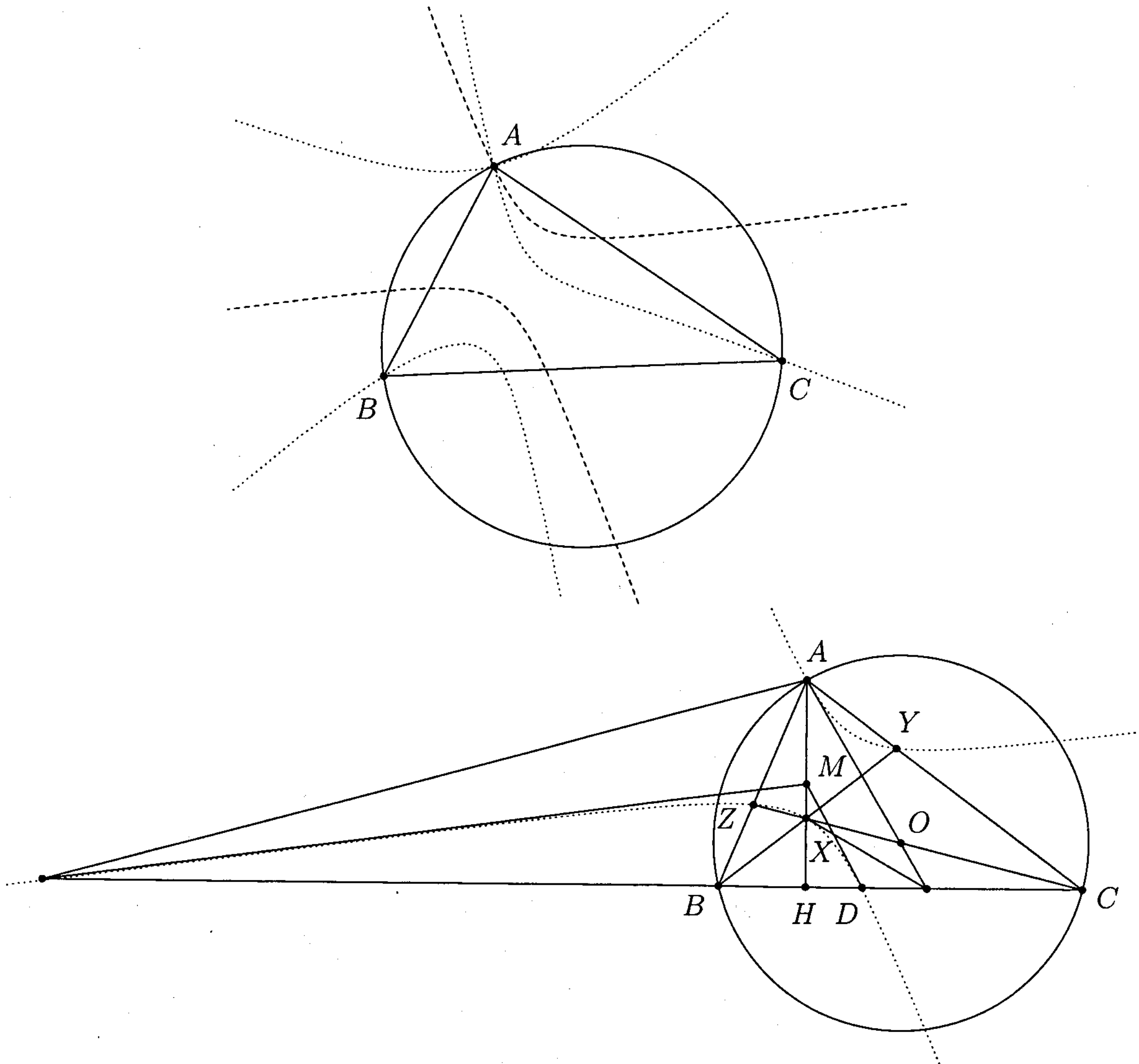
$$(C_a) : f(a) = a^2(c^2y^2 - b^2z^2) + b^2(c^2 + a^2 - b^2)zx - c^2(a^2 + b^2 - c^2)xy.$$

Viết đường cong (C_a) lại dưới dạng

$$a^2(b^2 - c^2)yz + b^2(2a^2 - b^2 + c^2)zx - c^2(2a^2 + b^2 - c^2)xy + a^2(x + y + z)(c^2y - b^2z) = 0.$$

Ta thấy rằng (C_a) chứa điểm A và chân các đường phân giác của góc A trên cạnh BC (tọa độ các điểm này là $(0, b, \pm c)$). Giao điểm của (C_a) với các cạnh AB, AC lần lượt là $Y = (a^2, 0, c^2 + a^2 - b^2)$, $Z = (a^2, : a^2 + b^2 - c^2, 0)$. Rõ ràng chúng đều là vết của điểm $X(a^2, a^2 + b^2 - c^2, c^2 + a^2 - b^2)$ lên các cạnh AB, AC và điểm X này cũng là điểm chia AH theo tỉ số $-2:1$. Bổ đề được chứng minh. □

Ta thấy rằng tiếp tuyến của (C_a) tại hai chân đường phân giác kẻ từ A đi qua trung điểm của đường cao ứng với đỉnh A, tiếp tuyến tại A và X đi qua vết của tâm đường tròn ngoại tiếp O trên cạnh BC của tam giác. Đây là những kết quả hết sức thú vị và cũng chính nhờ nó mà ta có thể dựng được chính xác đường hyperbol (C_a) như bên dưới.



Gọi P là tâm đường tròn nội tiếp (hoặc bàng tiếp) của tam giác ABC. Theo các phân tích ở trên thì rõ ràng điểm liên hợp đẳng giác của nó nằm trên đường cong (C_a). Do tính bình đẳng giữa các đỉnh nên nó cũng nằm trên các đường cong tương ứng với đỉnh B và C là

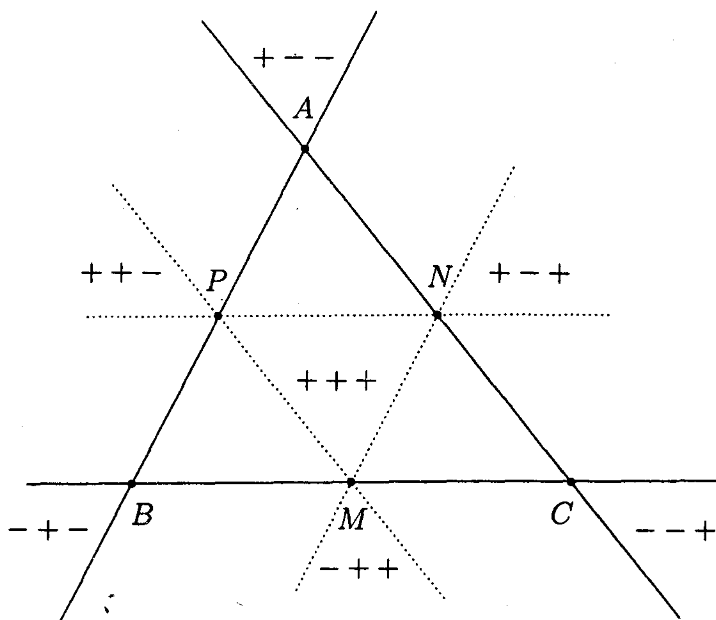
$$(C_b) : f(b) = b^2(a^2z^2 - c^2x^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2)xy - a^2(b^2 + c^2 - a^2)yz,$$
$$(C_c) : f(c) = c^2(b^2x^2 - a^2y^2) + a^2(b^2 + c^2 - a^2)yz - b^2(c^2 + a^2 - b^2)zx.$$

Dễ dàng thấy rằng $f(a) + f(b) + f(c) = 0$ nên các conic này tạo thành một chùm và điểm liên hợp đẳng giác của giao điểm các đường này chính sẽ giúp ta giải bài toán này.

Theo chứng minh ở trên thì rõ ràng các giao điểm này tồn tại và để phân biệt trường hợp tâm đường tròn nội tiếp và bàng tiếp, ta chia mặt phẳng có chứa tam giác ABC cũng như các đường thẳng đi qua các cạnh của nó bởi 7 miền được đánh dấu như sau tương ứng với dấu của tọa độ một điểm trong hệ tọa độ tỉ cự với tam giác cơ sở là ABC (điều này có thể chứng minh dễ dàng bằng biến đổi vector):

$$+++,\quad -++,\quad -+-,\quad ++-,\quad +--,\quad +-+,\quad --+.$$

Ta ký hiệu $e_1e_2e_3$ là miền được đánh dấu bộ ba các dấu cộng và trừ và không có trường hợp toàn bộ là các dấu trừ. Ta thấy rằng một điểm nằm trong miền $e_1e_2e_3$ của tam giác $A'B'C'$ khi và chỉ khi nó nằm trong miền $e_1e_2e_3$ tương ứng của tam giác tạo bởi các trung điểm các cạnh của tam giác ABC.



Gọi Q là điểm chung của các conic nói trên trong một miền $e_1e_2e_3$ nào đó. Các điểm liên hợp đẳng giác với Q qua các đỉnh A, B, C tương ứng chính là điểm P là tâm đường tròn nội tiếp hay ngoại tiếp của tam giác $A'B'C'$ cần dựng tùy theo số dấu $+$ và $-$ tương ứng với miền đó.

Sau khi có điểm P và tam giác cevian là ABC của tam giác $A'B'C'$. Ta hoàn toàn có thể dựng được các điểm A', B', C' và kết thúc bài toán.

Bài toán này đã được giải quyết nhưng tiếc rằng, với kiến thức Hình học hoàn toàn không sơ cấp! Trong phần tiếp theo, ta sẽ xét một số trường hợp đặc biệt của tam giác ABC mà với chúng thì ta có thể tìm được những lời giải sơ cấp hơn.

3.3.2 Bài toán trong một số trường hợp đặc biệt

(a) *Trường hợp ABC là tam giác vuông.* Giả sử tam giác ABC vuông tại C, thì hệ các phương trình ban đầu tương đối dễ giải hơn vì chúng ta có thể biến đổi để đơn giản các biểu thức thành

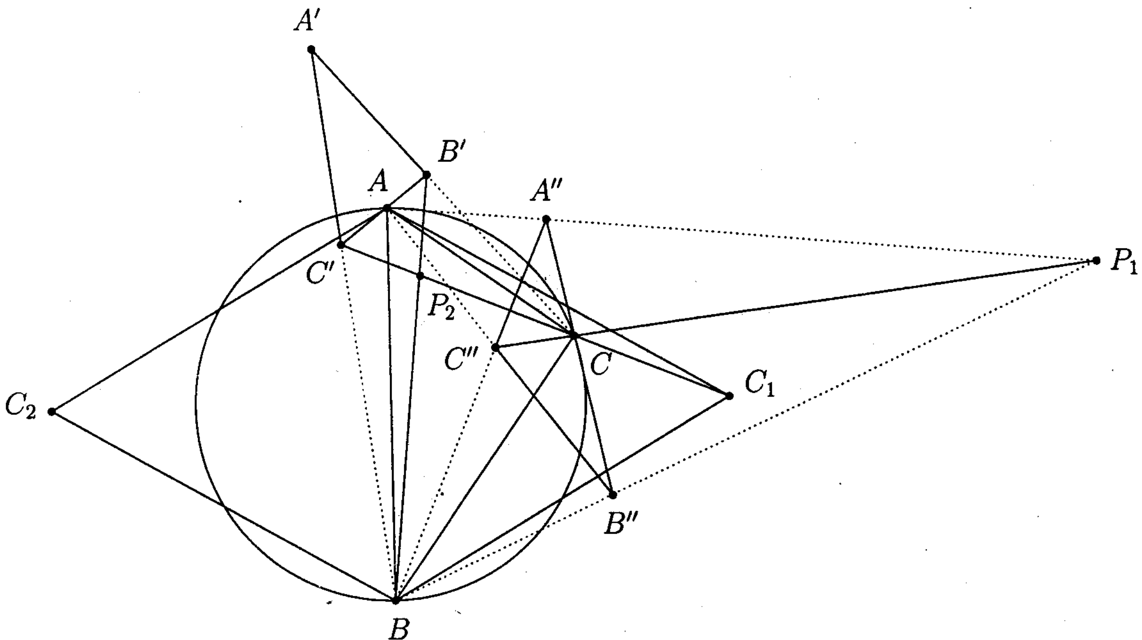
$$\begin{cases} x\left[(a^2+b^2)y^2 - b^2z^2\right] - 2a^2y^2z = 0 \\ y\left[(a^2+b^2)x^2 - a^2z^2\right] - 2b^2x^2z = 0 \\ z(b^2x^2 - a^2y^2) - 2xy(b^2x - a^2y) = 0. \end{cases}$$

Ta tìm được hai tọa độ của điểm P tương ứng cho trường hợp này là

$$P_1\left(a(\sqrt{3}a-b),\, b(\sqrt{3}b-a),\, (\sqrt{3}a-b)(\sqrt{3}b-a)\right),$$
$$P_2\left(a(\sqrt{3}a+b),\, b(\sqrt{3}b+a),\, -(\sqrt{3}a+b)(\sqrt{3}b+a)\right).$$

Các điểm này khá dễ so với trường hợp tổng quát và bài toán có thể giải bằng một con đường hoàn toàn sơ cấp. Ta xét hai tam giác đều ABC_1, ABC_2 dựng trên cạnh AB. Khi đó P_1, P_2 lần lượt là điểm đối xứng với C_1, C_2 qua C. Các điểm này sẽ là tâm đường tròn bàng tiếp của các tam giác $A'B'C'$ tương ứng.

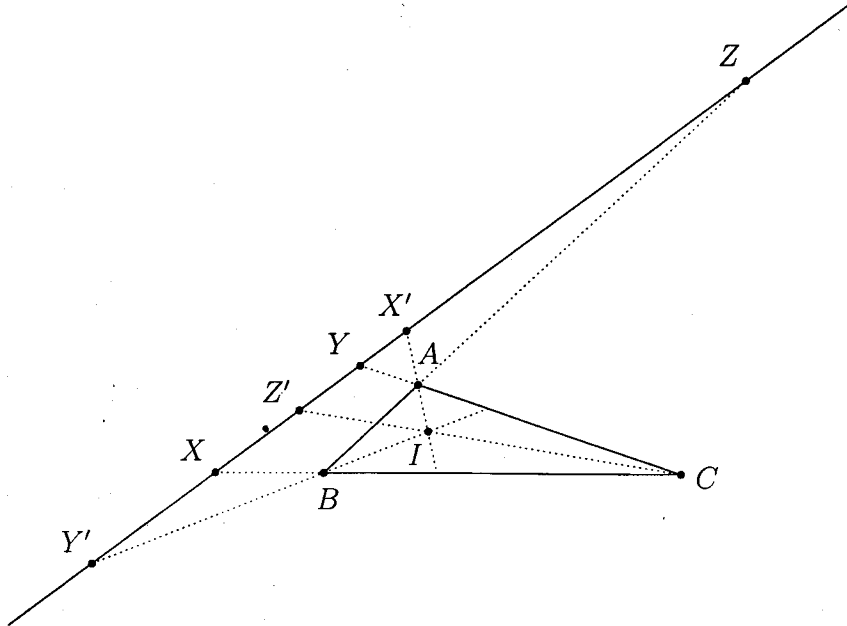
Một kết quả cần chú ý là P_1 trong hình vẽ bên dưới là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác $A'B'C'$ khi và chỉ khi A, B thỏa mãn điều kiện $\arctan\frac{\sqrt{3}}{2} < A, B < \arctan\frac{2}{\sqrt{3}}$.



(b) *Trường hợp ABC là tam giác suy biến.* Xét tam giác ABC có X, Y, Z lần lượt là chân các đường phân giác ngoài và vấn đề cần giải quyết là dựng lại tam giác ABC khi đã biết các điểm X, Y, Z nằm trên một đường thẳng d nào đó. Nếu các đường phân giác trong của góc A, B, C lần lượt cắt d tại X', Y', Z' thì X, Y, X', Z lập thành một hàng điểm điều hòa; tương tự với các bộ Y, Z, Y', X và Z, X, Z', Y. Ta sẽ tìm lời giải của bài toán từ những kết quả này.

Ta sẽ bắt đầu dựng tam giác ABC như thế từ ba điểm X, Y, Z nằm trên đường thẳng d nào đó. Không mất tính tổng quát, giả sử Y nằm giữa và gần X hơn Z. Gọi X', Y', Z'

lần lượt là các điểm liên hợp điều hòa của X, Y, Z trong các đoạn YZ, ZX, XY. Dựng các đường tròn đường kính XX', YY', ZZ'.



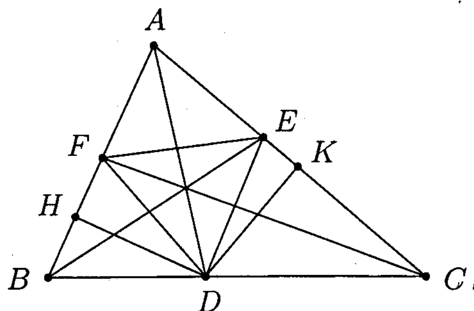
Dễ thấy rằng các đường này có tâm thẳng hàng và có chung trục đẳng phương là FF' (với F, F' là hai điểm chung của các đường tròn). Nếu dựng được F, F' trước thì các điểm X', Y', Z' sẽ xác định dễ hơn. Thật vậy, ta có một cách dựng đơn giản là: Dựng hai tam giác đều XYM và YZN về cùng một phía của đường thẳng d. Gọi F là giao điểm của XN và ZM, F' là điểm đối xứng với F qua d. Đó chính là các điểm cần tìm.

Trên đường tròn đường kính XX', lấy điểm A bất kỳ. Theo cách dựng các điểm thì rõ ràng X, X' chính là chân các đường phân giác trong và ngoài tại đỉnh A của tam giác $A'B'C'$. Giả sử YA cắt đường tròn đường kính ZZ' tại C (A, C nằm cùng phía so với Y) thì CZ là phân giác ngoài của tam giác CXY. Gọi B là giao điểm của hai đường thẳng AZ, CX. Bằng định lý Menelaus, ta chứng minh được BY là phân giác trong của tam giác BZX nên B nằm trên đường tròn đường kính YY' nên tam giác ABC dựng theo cách này thỏa mãn đề bài. Trong trường hợp này, bài toán có vô số nghiệm hình.

Tiếp theo, ta xét một số bài toán liên quan như sau.

Ví dụ 22. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $D(0, 2)$, $E(2, 5)$ và $F(3, 0)$. Dựng tam giác ABC sao cho D, E, F lần lượt là chân các đường phân giác góc A, B, C trong của tam giác ABC.*

Lời giải. Ta tính được $DE^2 = DF^2 = 13$, $EF^2 = 26$ nên tam giác DEF vuông cân tại D. Ta sẽ chứng minh rằng tam giác ABC cần dựng cân tại A.



(a) *Cách 1.* Trước hết, ta chứng minh nhận xét sau:

Nhận xét 1. *Tam giác ABC có D, E, F lần lượt là chân đường phân giác ứng với góc A, B, C. Khi đó $DE = DF$ khi và chỉ khi tam giác ABC cân tại A hoặc tứ giác $ADEF$ nội tiếp.*

Chứng minh. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của D lên AB, AC. Do $DH = DK$ nên hai tam giác DHF và DKE bằng nhau, suy ra

$$\angle HFD = \angle KED. \quad (1)$$

Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu H, K lần lượt thuộc BF và CF thì từ (1), ta có $\angle ADE = \angle ADF$ nên hai tam giác ADE và ADF bằng nhau (g.c.g). Do đó $AE = AF$. Mà $AE = \frac{bc}{a+c}$, $AF = \frac{bc}{a+b}$, nên ta được $AB = AC$, hay tam giác ABC cân tại A.
- Nếu H không thuộc BF và K không thuộc CE thì chứng minh tương tự.
- Nếu H thuộc BF nhưng K không thuộc CE (trường hợp ngược lại tương tự) thì từ (1), dễ thấy rằng tứ giác $AEDF$ nội tiếp.

Nhận xét 1 được chứng minh. ■

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh nhận xét rằng:

Nhận xét 2. *Nếu ABC là tam giác vuông nhưng không cân tại A với D, E, F lần lượt là chân đường phân giác góc A, B, C thì tam giác DEF không cân.*

Chứng minh. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét các điểm $A(0,\,0)$, $B(b,\,0)$, $C(0,\,c)$ với b, $c > 0$. Phương trình đường thẳng BC là $\frac{x}{b} + \frac{y}{c} = 1$, hay $cx + by - bc = 0$. Phương trình phân giác góc A là $x - y = 0$. Do đó, tọa độ điểm D là $D\left(\frac{bc}{b+c},\, \frac{bc}{b+c}\right)$. Ta có $BC = \sqrt{b^2+c^2}$, suy ra $AE = \frac{bc}{b+\sqrt{b^2+c^2}}$ và $E\left(0,\, \frac{bc}{b+\sqrt{b^2+c^2}}\right)$. Do vậy

$$DE^2 = \left(\frac{bc}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{b+c} - \frac{bc}{b+\sqrt{b^2+c^2}}\right)^2.$$

Tương tự, ta cũng có

$$DF^2 = \left(\frac{bc}{b+c} - \frac{bc}{b+\sqrt{b^2+c^2}}\right)^2 + \left(\frac{bc}{b+c}\right)^2.$$

Theo giả thiết, ta có

$$\left(\frac{bc}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{b+c} - \frac{bc}{b+\sqrt{b^2+c^2}}\right)^2 = \left(\frac{bc}{b+c} - \frac{bc}{b+\sqrt{b^2+c^2}}\right)^2 + \left(\frac{bc}{b+c}\right)^2.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{bc}{b+c} - \frac{bc}{b+\sqrt{b^2+c^2}} = \frac{bc}{b+c} - \frac{bc}{c+\sqrt{b^2+c^2}},$$

hoặc

$$\frac{bc}{b+c} - \frac{bc}{b+\sqrt{b^2+c^2}} = -\frac{bc}{b+c} + \frac{bc}{c+\sqrt{b^2+c^2}}.$$

Đẳng thức thứ nhất xảy ra khi $b = c$, còn đẳng thức thứ hai xảy ra khi $b + c = 2\sqrt{b^2+c^2}$. Tuy nhiên, cả hai điều này đều không thể có được, do đó nhận xét được chứng minh. ■

Từ hai nhận xét trên, ta thấy rằng nếu tam giác DEF ban đầu vuông cân thì tam giác ABC phải cân, vì nếu xảy ra trường hợp tam giác ABC không cân thì tứ giác $AEDF$ nội tiếp, mà góc D vuông nên góc A cũng phải vuông, theo nhận xét thứ hai thì đây là điều vô lý. ∎

(b) *Cách 2.* Ta sẽ chứng minh các nhận xét trực tiếp bằng cách biến đổi Đại số. Ta có

$$\begin{aligned} DE^2 &= CD^2 + CF^2 - 2CD \cdot CF \cdot \cos C \\ &= \left(\frac{ab}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{ab}{c+a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{ab}{b+c} \cdot \frac{ab}{c+a} \cdot \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \\ &= \frac{a^2b^2\left[(b+c)^2+(c+a)^2\right] - ab(b+c)(c+a)(a^2+b^2-c^2)}{(b+c)^2(c+a)^2}. \end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có

$$DF^2 = \frac{a^2c^2\left[(b+c)^2+(a+b)^2\right] - ac(b+c)(a+b)(c^2+a^2-b^2)}{(b+c)^2(a+b)^2}.$$

Nếu $DE = DF$ thì hai biểu thức trên bằng nhau, quy đồng và phân tích thành nhân tử, ta có

$$abc(b-c)(b+c)(a^3+a^2b+a^2c-b^3-ab^2-c^3-ac^2-bc^2-b^2c-abc) = 0,$$

suy ra

$$b = c \vee (a+b+c)(a^2-b^2-c^2) = abc.$$

Đến đây, ta thấy rằng tam giác ABC phải cân hoặc tù tại A, tiếp tục chứng minh nhận xét thứ hai để suy ra tam giác ABC cân tại A. ∎

Trở lại bài toán ban đầu, ta có cách dựng hình như sau:

- Đường thẳng d qua D, song song với EF chính là đường thẳng chứa cạnh BC. Ta có $\overrightarrow{EF} = (1, -5)$ nên phương trình đường thẳng BC là $5(x-0)+(y-2)=0$, hay

$$5x + y - 2 = 0.$$

- Tam giác BEF cân tại F (do $\angle EBF = \angle FEB = \frac{1}{2}\angle ABC$) nên B chính là giao điểm của đường tròn (E, EF) với d. Ta xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 5x + y - 2 = 0 \\ (x-3)^2 + y^2 = 26 \end{cases}$$

Thay $(x-3)^2 + (5x-2)^2 = 26$, ta giải được hai nghiệm là

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}, y = \dfrac{-1+5\sqrt{3}}{2} \\ x = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, y = \dfrac{-1-5\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

Ta cần chọn điểm nằm khác phía với D so với hình chiếu của F lên d. Dễ thấy rằng $\angle BDF = 45^\circ$ nên $BD > DF \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{26}}{2}$. Thử trực tiếp, ta được

$$B\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-5\sqrt{3}}{2}\right).$$

- Do C đối xứng với B qua D nên
$$C\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{9+5\sqrt{3}}{2}\right).$$

- Điểm A là giao điểm của trung trực EF với đường thẳng BF. Mà phương trình của trung trực EF là $(x-0)-5(y-2)=0$ hay $x-5y+10=0$, và phương trình đường thẳng BF là $x+\frac{10-13\sqrt{3}}{37}y=3$. Do đó, tọa độ của A chính là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} x-5y+10=0 \\ x+\dfrac{10-13\sqrt{3}}{37}y=3 \end{cases}$$
Giải hệ này, ta thu được nghiệm là
$$\begin{cases} x=\dfrac{15+5\sqrt{3}}{6} \\ y=\dfrac{15+\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

Vậy tọa độ các đỉnh của tam giác ABC cần tìm là
$$A\left(\frac{15+5\sqrt{3}}{6}, \frac{15+\sqrt{3}}{6}\right), \quad B\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-5\sqrt{3}}{2}\right), \quad C\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{9+5\sqrt{3}}{2}\right).$$

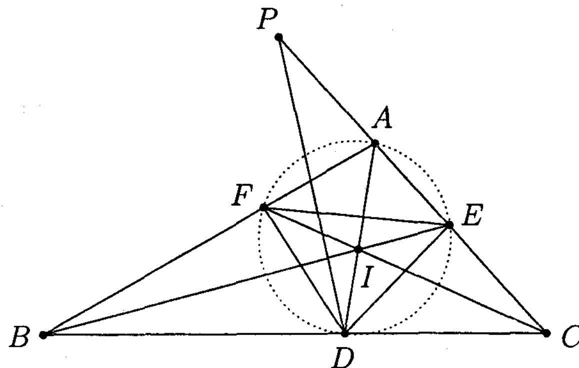
Bài toán được giải quyết xong. □

Ví dụ 23 (Trung Quốc, 2003). *Cho tam giác ABC không cân có chân các đường phân giác trong lần lượt là D, E, F. Chứng minh rằng nếu tam giác DEF cân tại D thì tam giác ABC có góc A tù.*

Chứng minh. Đặt $BC=a$, $CA=b$ và $AB=c$. Cách giải bằng Đại số cho bài này đã được nêu ở ví dụ trên, ta sẽ tìm hiểu một cách Hình học thuần túy hơn: Ta có
$$\frac{\sin\angle AFD}{\sin\angle FAD}=\frac{AD}{FD}=\frac{AD}{ED}=\frac{\sin\angle AED}{\sin\angle EAD}.$$

Mà $\sin FAD=\sin\angle EAD$ nên $\angle AFD=\angle AED$ hoặc $\angle AFD+\angle AED=180°$.

Trường hợp thứ nhất dễ dàng cho thấy rằng tam giác ABC cân tại A nên không thỏa, do vậy ta phải có $\angle AFD+\angle AED=180°$, suy ra A, E, D, F cùng thuộc một đường tròn.



Do đó $\angle DEC = \angle DFA > \angle ABC$. Trên tia CA lấy điểm P sao cho $\angle DPC = \angle ABC$ thì $PC = PE + EC$. Ta có $\triangle BFD = \triangle PED$ (g.c.g) nên

$$PE = BE = \frac{ac}{a+b}.$$

Hơn nữa, do $\triangle PCD = \triangle BCA$ (g.g) nên $\frac{PC}{BC} = \frac{CD}{CA}$, hay

$$PC = \frac{a}{b} \cdot \frac{ba}{b+c} = \frac{a^2}{b+c}.$$

Chú ý rằng ta cũng có $EC = \frac{ab}{c+a}$ nên $\frac{a^2}{b+c} = \frac{ac}{a+b} + \frac{ab}{a+c}$, hay

$$a(a+b)(a+c) = b(b+a)(b+c) + c(c+a)(c+b).$$

Từ đây suy ra

$$a^2(a+b+c) = b^2(a+b+c) + c^2(a+b+c) + abc > (b^2+c^2)(a+b+c),$$

và do đó $a^2 > b^2 + c^2$. Điều này chứng tỏ tam giác ABC tù. □

Nhận xét. Ta cũng có thể chứng minh được đẳng thức trên tương đương với

$$2(\sin A + \sin B + \sin C) + \tan A = 0,$$

nên cách phát biểu dưới dạng lượng giác của bài này cũng thực sự rất thú vị!

4 Một số bài tập áp dụng

Để thể hiện sự linh hoạt trong việc vận dụng các phương pháp, các bài tập dưới đây sẽ không được chỉ định trước là sẽ giải bằng cách nào. Chúng ta hãy phân tích đặc điểm của bài toán để lựa chọn ra cách hiệu quả nhất!

Bài tập 1. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có các phân giác AD, BE, CF (với D, E, F lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB). Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của AD, BE, CF với (O). Chứng minh rằng

$$\frac{AD}{AM} + \frac{BE}{BN} + \frac{CF}{CP} \geqslant \frac{9}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài tập 2. Cho tam giác ABC có (O) là đường tròn ngoại tiếp và (I) là đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng tồn tại vô số các tam giác $A'B'C'$ ngoại tiếp đường tròn (I) và nội tiếp trong đường tròn (O). Tìm quỹ tích trọng tâm các tam giác $A'B'C'$ như vậy.

Bài tập 3. Cho tam giác ABC có AD là phân giác góc A, hình chiếu của D lên AB, AC là M, N. Gọi H là giao điểm của BN, CM. Chứng minh rằng AH vuông góc với BC.

Bài tập 4. Giả sử tứ giác $ABCD$ có $AD = BC$, AC và BD cắt nhau ở O, phân giác các góc DAB và CBA cắt nhau ở I. Chứng minh rằng trung điểm của các đoạn thẳng AB, CD, OI cùng thuộc một đường thẳng.

Bài tập 5. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có M là trung điểm của AB, N thuộc tia phân giác của góc BCD. Gọi P là hình chiếu của N trên BC. Chứng minh rằng nếu MN vuông góc với DP thì $AN = BC$.

Bài tập 6. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) và có D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (I) lên các cạnh BC, CA, AB. Gọi M là giao điểm của BY, ZX; N là giao điểm của CZ và XY. Gọi E, F là trung điểm của MY và NZ. Chứng minh rằng AI, YF, ZE đồng quy.

Bài tập 7. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) và nội tiếp đường tròn (O). Các đường thẳng AO, BO, CO lần lượt cắt (O) tại các điểm thứ hai là D, E, F. Gọi M, N, P lần lượt lượt là giao của ID với BC, IE với CA, IF với AB. Chứng minh rằng AM, BN, CP đồng quy.

Bài tập 8. Cho tam giác ABC có các phân giác AD, BE, CF. Chứng minh rằng

$$4S_{DEF} \leqslant S_{ABC}.$$

Bài tập 9. Cho tam giác ABC nhọn, không cân, ngoại tiếp đường tròn (I) có H là chân đường cao ứng với góc A. Gọi M là trung điểm BC. Biết rằng trung trực HM đi qua I. Chứng minh rằng độ dài các cạnh của tam giác lập thành một cấp số cộng.

Bài tập 10. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Tiếp điểm của (I) lên BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. Đoạn AD cắt (I) tại M. Đường thẳng qua M vuông góc vớiAD cắt EF ở N. Chứng minh rằng AN song song với BC.

Bài tập 11. Cho tam giác ABC có BC là cạnh nhỏ nhất; các đường phân giác trong AA', BB', CC' đồng quy tại I và theo thứ tự cắt các cạnh BC, CA, AB tại A', B', C'. Giả sử bán kính các đường tròn nội tiếp các tam giác $IA'B'$, $IA'C'$ bằng nhau. Chứng minh tam giác ABC cân tại A.

Bài tập 12. Cho tam giác ABC với (I) là đường tròn nội tiếp. Tiếp điểm của (I) trên BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. Gọi M, N, P lần lượt là điểm chung của các cặp đường thẳng (EF, BC), (DF, CA), (DE, AB). Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

Bài tập 13. Cho tam giác ABC có $AB < AC$ với BD là đường trung tuyến, đường phân giác BE. Đường thẳng qua C vuông góc với BE ở F và cắt BD ở G. Gọi K là trung điểm của GE. Chứng minh rằng D, K, F thẳng hàng.

Tài liệu tham khảo

[1] Vũ Hữu Bình, *Nâng cao và phát triển Toán*, lớp 9, tập 2, Nhà xuất bản Giáo dục, 1994.

[2] Paul Yiu, *Conic Construction of a Triangle from the Feet of Its Angle Bisectors*, Ebook Publication, 2008. [ONLINE: `http://math.fau.edu/yiu/YiuFromBisectors.pdf`]

[3] *Tuyển tập 10 năm tạp chí Toán học Tuổi trẻ*, Nhà xuất bản Giáo dục, 1996.

[4] Trần Nam Dũng, *Phương pháp tọa độ*, Các tài liệu luyện thi VMO 2009.

[5] Marko Radovanovic, *Complex Numbers in Geometry*, IMO Training Materials, 2007. [ONLINE: `http://www.imomath.com/tekstkut/cnum_mr.pdf`]

[6] Xiong Bin, Lee Peng Yee, *Mathematical Olympiad in China*, East China Normal University Press, 2007.

[7] `http://forum.mathscope.org/showthread.php?t=18069`.

[8] http://forum.mathscope.org/showthread.php?p=100365.

[9] http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.

[10] Các diễn đàn Toán học:

- http://www.artofproblemsolving.com.
- http://mathscope.org.
- http://math.vn.

PHÉP CHỨNG MINH PHẢN CHỨNG

Trần Nam Dũng[1,2]

Chứng minh là một nét đặc trưng của Toán học, tạo ra sự khác biệt giữa Toán học với các môn khoa học khác. Nắm bắt phương pháp và kỹ thuật chứng minh cũng là yêu cầu bắt buộc đối với học sinh nói chung và đặc biệt là đối với các em học sinh giỏi nói riêng. Các phương pháp và kỹ thuật chứng minh rất phong phú: từ chứng minh trực tiếp đến gián tiếp, từ chứng minh bằng quy nạp đến chứng minh bằng phản chứng, từ ví dụ đến phản ví dụ, từ xây dựng đến không xây dựng, ... Trong bài viết này, chúng ta đề cập đến phép chứng minh phản chứng, một trong những phương pháp chứng minh kinh điển và quan trọng nhất của Toán học.

1 Những ví dụ mở đầu

Chứng minh phản chứng có thể nói là một trong những vũ khí quan trọng của Toán học. Nó cho phép chúng ta chứng minh sự có thể và không có thể của một tính chất nào đó, nó cho phép chúng ta biến thuận thành đảo, biến đảo thành thuận, nó cho phép chúng ta lý luận trên những đối tượng mà không rõ là có tồn tại hay không. Ví dụ kinh điển nhất về phép chứng minh phản chứng thuộc về Euclid với phép chứng minh

Định lý 1. *Tồn tại vô số số nguyên tố.*

Ở đây, Euclid đã giả sử ngược lại rằng tồn tại hữu hạn số nguyên tố $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Ông xét tích $N = p_1p_2\cdots p_n + 1$. N phải có ít nhất một ước số nguyên tố p. Khi đó, do $p_1, p_2, \ldots, p_n$ là tất cả các số nguyên tố nên tồn tại i sao cho $p = p_i$. Nhưng khi đó $p \mid 1$, mâu thuẫn.

Bài tập 1.

1. Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên tố dạng $4k + 3$.
2. Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên tố dạng $4k + 1$.

Một chứng minh nổi tiếng khác bằng phương pháp phản chứng chính là chứng minh của Euler cho định lý nhỏ Fermat với trường hợp $n = 4$.

Định lý 2. *Phương trình*

$$x^4 + y^4 = z^4 \tag{1}$$

không có nghiệm nguyên dương.

Ông đã giả sử rằng phương trình $x^4 + y^4 = z^4$ có nghiệm nguyên dương. Khi đó, theo *nguyên lý cực hạn*, tồn tại nghiệm (x_0, y_0, z_0) với $x_0 + y_0 + z_0$ nhỏ nhất. Sau đó, bằng cách sử dụng cấu trúc nghiệm của phương trình Pythagore $x^2 + y^2 = z^2$, ông đi đến sự tồn tại của một nghiệm (x_1, y_1, z_1) có $x_1 + y_1 + z_1 < x_0 + y_0 + z_0$, từ đó đưa đến mâu thuẫn (xem chứng minh chi tiết trong phần 3 của bài viết này).

Phương pháp này thường được gọi là *phương pháp xuống thang.*

---

[1]Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh.

[2]Trích bài giảng tại "Khóa bồi dưỡng nâng cao kiến thức môn Toán học", Hà Nội, tháng 08/2011.

Bài tập 2.

1. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 3y^3 = 9z^3$ không có nghiệm nguyên dương.

2. Chứng minh rằng phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ không có nghiệm nguyên dương.

Chứng minh sử dụng *mệnh đề phản đảo* cũng là một phương án chứng minh phản chứng hay được sử dụng. Cơ sở của phương pháp là để chứng minh $A \to B$, ta có thể chứng minh $\overline{B} \to \overline{A}$. Về mặt bản chất thì hai phép suy diễn này có vẻ giống nhau, nhưng trong thực tế thì lại khá khác nhau. Ta thử xem xét một vài ví dụ.

Ví dụ 1. *Chứng minh rằng hàm số* $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ *là một đơn ánh từ* $\mathbb{R}$ *vào* $\mathbb{R}$.

Ví dụ 2. *Chứng minh rằng nếu* $(p-1)! + 1$ *chia hết cho* p *thì* p *là số nguyên tố.*

Trong ví dụ 1, rõ ràng việc chứng minh $x_1 \neq x_2$ suy ra $f(x_1) \neq f(x_2)$ khó khăn hơn việc chứng minh $f(x_1) = f(x_2)$ suy ra $x_1 = x_2$, dù rằng về mặt logic, hai điều này là tương đương.

Trong ví dụ 2, gần như không có cách nào khác ngoài cách chứng minh nếu p là hợp số, $p = rs$ thì $(p-1)! + 1$ không chia hết cho p.

Bài tập 3.

1. Cho hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn các điều kiện sau:

   (i) f đơn điệu;

   (ii) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$.

   Chứng minh rằng $f(x) = xf(1)$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

2. Cho a, b, c là các số không âm thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Chứng minh rằng

$$a + b + c \leqslant 3.$$

Trong việc chứng minh một số tính chất bằng phương pháp phản chứng, ta có thể có thêm một số thông tin bổ sung quan trọng nếu sử dụng *phản ví dụ nhỏ nhất.*

Ý tưởng là để chứng minh một tính chất A cho một cấu hình P, ta xét một đặc trưng $f(P)$ của P là một hàm có giá trị nguyên dương. Bây giờ giả sử tồn tại một cấu hình P không có tính chất A, khi đó sẽ tồn tại một cấu hình P_0 không có tính chất A với $f(P_0)$ nhỏ nhất. Ta sẽ tìm cách suy ra điều mâu thuẫn. Lúc này, ngoài việc chúng ta có cấu hình P_0 không có tính chất A, ta còn có mọi cấu hình P với $f(P) < f(P_0)$ đều có tính chất A.

Ví dụ 3. *Cho ngũ giác lồi* $ABCDE$ *trên mặt phẳng toạ độ có toạ độ các đỉnh đều nguyên.*

(a) *Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một điểm nằm trong hoặc nằm trên cạnh của ngũ giác (khác với* A, B, C, D, E*) có toạ độ nguyên.*

(b) *Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một điểm nằm trong ngũ giác có toạ độ nguyên.*

(c) *Các đường chéo của ngũ giác lồi cắt nhau tạo ra một ngũ giác lồi nhỏ* $A_1B_1C_1D_1E_1$ *bên trong. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một điểm nằm trong hoặc trên biên ngũ giác lồi* $A_1B_1C_1D_1E_1$.

Chứng minh. Câu (a) có thể giải quyết dễ dàng nhờ *nguyên lý Dirichlet*: Vì có 5 điểm nên tồn tại ít nhất hai điểm X, Y mà cặp toạ độ (x, y) của chúng có cùng tính chẵn lẻ (ta chỉ có 4 trường hợp (chẵn, chẵn), (chẵn, lẻ), (lẻ, chẵn) và (lẻ, lẻ)). Trung điểm Z của XY chính là điểm cần tìm.

Sang câu (b) lý luận trên đây chưa đủ, vì nếu XY không phải là đường chéo mà là cạnh thì Z có thể sẽ nằm trên biên. Ta xử lý tình huống này như sau: Để ý rằng nếu XY là một cạnh, chẳng hạn là cạnh AB thì $ZBCDE$ cũng là một ngũ giác lồi có các đỉnh có toạ độ đều nguyên và ta có thể lặp lại lý luận nêu trên đối với ngũ giác $ZBCDE, \ldots$ Ta có thể dùng *đơn biến* để chứng minh quá trình này không thể kéo dài mãi, và đến một lúc nào đó sẽ có một ngũ giác có điểm nguyên nằm trong.

Tuy nhiên, ta có thể trình bày lại lý luận này một cách gọn gàng như sau: Giả sử tồn tại một ngũ giác nguyên mà bên trong không chứa một điểm nguyên nào (phản ví dụ). Trong tất cả các ngũ giác như vậy, chọn ngũ giác $ABCDE$ có diện tích nhỏ nhất (phản ví dụ nhỏ nhất). Nếu có nhiều ngũ giác như vậy thì ta chọn một trong số chúng.

Theo lý luận đã trình bày ở câu (a), tồn tại hai đỉnh X, Y có cặp toạ độ cùng tính chẵn lẻ. Trung điểm Z của XY sẽ có toạ độ nguyên. Vì bên trong ngũ giác $ABCDE$ không có điểm nguyên nào nên XY phải là một cạnh nào đó. Không mất tính tổng quát, giả sử đó là AB. Khi đó ngũ giác $ZBCDE$ có toạ độ các đỉnh đều nguyên và có diện tích nhỏ hơn diện tích ngũ giác $ABCDE$. Do tính nhỏ nhất của $ABCDE$ (phản ví dụ nhỏ nhất phát huy tác dụng!) nên bên trong ngũ giác $ZBCDE$ có một điểm nguyên T. Điều này mâu thuẫn vì T cũng nằm trong ngũ giác $ABCDE$. □

Bài tập 4.

1. Giải phần (c) của ví dụ 3.
2. (Định lý Bezout) Chứng minh rằng nếu $(a, b) = 1$ thì tồn tại u, v sao cho $au + bv = 1$.
3. Trên mặt phẳng đánh dấu một số điểm. Biết rằng 4 điểm bất kỳ trong chúng là đỉnh của một tứ giác lồi. Chứng minh rằng tất cả các điểm được đánh dấu là đỉnh của một đa giác lồi.

Phương pháp phản chứng thường hay được sử dụng trong các *bài toán bất biến* hoặc *bài toán phủ hình* để chứng minh sự không thực hiện được. Sau đây chúng ta xem xét 2 ví dụ như vậy.

Ví dụ 4. *Xét hình vuông* 7×7 *ô. Chứng minh rằng ta có thể xoá đi một ô để phần còn lại không thể phủ kín bằng* 15 *quân trimino kích thước* 1×3 *và một quân trimino hình chữ L.*

Chứng minh. Ta chứng minh rằng nếu bỏ đi một ô ở góc trên bên trái thì phần còn lại không thể phủ được bằng các quân trimino đã cho. Để làm điều này, ta đánh số các ô vuông như sau

1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1

Khi đó, nhận xét rằng một quân trimino kích thước 1×3 sẽ che ba số 1, 2, 3 (nếu nó nằm ngang) hoặc ba số giống nhau (nếu nó nằm dọc). Như vậy tổng các số mà một quân trimino

1×3 che luôn chia hết cho 3. Trong khi đó dễ thấy quân trimino hình chữ L che ba số có tổng không chia hết cho 3.

Bây giờ giả sử ngược lại rằng hình vuông 7×7 bỏ đi ô ở góc trên bên trái có thể phủ được bằng 15 quân trimino 1×3 và một quân trimino hình chữ L thì theo lý luận trên, tổng số các số mà các quân trimino này che sẽ không chia hết cho 3. Điều này mâu thuẫn vì tổng các số trên các ô còn lại bằng

$$20 \cdot 1 + 14 \cdot 2 + 14 \cdot 3 = 90$$

chia hết cho 3! Mâu thuẫn trên chứng tỏ điều giả sử là sai và ta có điều phải chứng minh. □

Ví dụ 5. *Hình tròn được chia bởi 5 đường kính thành 10 ô bằng nhau. Ban đầu trong mỗi ô có một viên bi. Mỗi lần thực hiện, cho phép chọn hai viên bi bất kỳ và di chuyển chúng sang ô bên cạnh, một viên theo chiều kim đồng hồ và một viên ngược chiều kim đồng hồ. Hỏi sau một số hữu hạn lần thực hiện, ta có thể chuyển tất cả các viên bi về cùng một ô được không?*

Nếu làm thử thì chúng ta sẽ thấy rằng không thể thực hiện được yêu cầu. Chúng ta có thể cùng lắm là dồn 9 viên bi về một ô, còn một viên bi khác thì không thể dồn được. Nhưng làm thế nào để chứng minh điều này? Lời giải hóa ra là khá đơn giản. Ta sẽ dùng phản chứng kết hợp với bất biến.

Lời giải. Ta tô màu các ô bằng hai màu đen trắng xen kẽ nhau. Gọi S là tổng số viên bi nằm ở các ô đen thì ở trạng thái ban đầu ta có $S = 5$. Nếu giả sử ngược lại rằng ta có thể đưa các viên bi về cùng một ô thì ở trạng thái cuối cùng này, ta sẽ có $S = 0$ (nếu ta dồn các viên bi về một ô trắng) hoặc $S = 10$ (nếu ta dồn các viên bi về một ô đen).

Bây giờ ta sẽ thu được điều mâu thuẫn nếu ta chứng minh được qua các lần thực hiện thì tính chẵn lẻ của S sẽ không thay đổi, tức là nếu ban đầu S là số lẻ thì qua các lần thực hiện, S sẽ luôn là số lẻ (và sẽ không thể bằng 0 hoặc bằng 10).

Nếu nhận xét rằng các ô đen trắng xen kẽ nhau thì điều mà chúng ta cần chứng minh khá hiển nhiên và chúng tôi xin dành phép chứng minh chi tiết cho bạn đọc. □

Bài tập 5.

1. Hình vuông 5×5 bỏ đi ô ở gốc trên bên trái. Chứng minh rằng có thể phủ phần còn lại bằng 8 quân trimino hình chữ L nhưng không thể phủ được bằng 8 quân trimino hình chữ nhật kích thước 1×3. Tìm tất cả các giá trị k sao cho có thể phủ phần còn lại bằng k quân trimino 1×3 và $8 - k$ trimino hình chữ L.

2. Xét hình vuông 7×7 ô. Tìm tất cả các ô mà nếu ta xóa đi ô đó thì phần còn lại có thể phủ kín bằng 15 quân trimino kích thước 1×3 và một quân trimino hình chữ L.

3. Trên vòng tròn ban đầu theo một thứ tự tuỳ ý có 4 số 1 và 5 số 0. Ở khoảng giữa hai chữ số giống nhau ta viết số 1 và ở khoảng giữa hai chữ số khác nhau ta viết số 0. Các số ban đầu bị xoá đi. Hỏi sau một số lần thực hiện như vậy ta có thể thu được một bộ gồm 9 số 0 hay không?

4. Cho trước các hàm số $f_1(x) = x^2 + 2x$, $f_2(x) = x + \frac{1}{x}$ và $f_3(x) = x^2 - 2x$. Cho phép thực hiện các phép toán cộng hai hàm số, nhân hai hàm số, nhân một hàm số với một hằng số tuỳ ý. Các phép toán này có thể tiếp tục được thực hiện nhiều lần trên f_i và trên các kết quả thu được. Chứng minh rằng có thể thu được hàm số $\frac{1}{x}$ từ các hàm số f_1, f_2, f_3 bằng các sử dụng các phép toán trên nhưng điều này không thể thực hiện được nếu thiếu một trong ba hàm f_1, f_2, f_3.

2 Cơ sở logic của phép chứng minh phản chứng

Trong phần này chúng ta sẽ sử dụng kiến thức về logic mệnh đề để làm sáng tỏ cơ sở logic của các sơ đồ chứng minh phản chứng, cũng như phân tích những điểm mạnh yếu của từng sơ đồ.

Sơ đồ chứng minh mà Euclid đã sử dụng có dạng: Để chứng minh A đúng, ta chứng minh nếu $\overline{A}$ sai thì sẽ dẫn đến mâu thuẫn, tức là

$$A \Leftrightarrow \overline{A} \to 0.$$

Lập bảng chân trị, ta dễ dàng thấy điều này:

A	$\overline{A}$	$\overline{A} \to 0$
0	1	0
1	0	1

Với sơ đồ chứng minh bằng mệnh đề phản đảo, ta sử dụng tương đương logic

$$A \to B \Leftrightarrow \overline{B} \to \overline{A}.$$

Ta có thể kiểm chứng tương đương logic này bằng cách lập bảng chân trị:

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \to B$	$\overline{B} \to \overline{A}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1

Phép chứng minh dùng mệnh đề phản đảo đặc biệt hiệu quả trong các bài toán mà mệnh đề B là tuyển của các mệnh đề, $B = B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_n$. Khi đó $\overline{B} = \overline{B_1} \wedge \overline{B_2} \wedge \cdots \wedge \overline{B_n}$ và như vậy để chứng minh $\overline{A}$, ta có thể sử dụng tất cả các điều kiện $\overline{B_i}$ với $i = 1, 2, \ldots, n$.

Cũng sử dụng bảng chân trị, ta thấy rằng $A \to B$ không tương đương với $B \to A$ như nhiều người hay lầm tưởng và ngộ nhận. Đây là sai lầm rất thường gặp trong các "chứng minh" Toán học. Chẳng hạn có tài liệu tham khảo đã hướng dẫn "muốn chứng minh x, y, z là ba cạnh của một tam giác, chỉ cần chứng minh $2(xy + yz + zx) > x^2 + y^2 + z^2$".

Một sai lầm thường gặp khác là mệnh đề "nếu A thì B" thường được hiểu là sẽ suy ra mệnh đề "nếu không B thì không A".

Chú ý là $\overline{A \to B} = \overline{\overline{A} \vee B} = A \wedge \overline{B}$. Do đó, đối với mệnh đề dạng $A \to B$, ta có sơ đồ chứng minh phản chứng quen thuộc sau

$$A \to B \Leftrightarrow A \vee \overline{B} \to 0.$$

Ưu điểm của sơ đồ này là bên cạnh điều kiện nguyên thủy A, ta còn có điều kiện bổ sung $\overline{B}$, tức là có thêm dữ kiện. Điểm khó của phương pháp này là ta không biết đích tới là gì, cụ thể, ta cần dẫn đến một mâu thuẫn, nhưng mâu thuẫn đó là gì thì ta không biết.

Ví dụ 6. *Chứng minh rằng nếu x, y, z là các số nguyên thỏa mãn $x^2 + y^2 = z^2$ thì $xyz \vdots 3$.*

Chứng minh. Giả sử ngược lại xyz không chia hết cho 3. Khi đó từng số x, y, z không chia hết cho 3, do đó x^2, y^2, z^2 chia 3 dư 1. Nhưng khi đó vế trái chia 3 dư 2 còn vế phải chia 3 dư 1, mâu thuẫn. □

Trong các tình huống khác nhau, mâu thuẫn có thể xuất hiện rất đa dạng, đó có thể là một số vừa chẵn vừa lẻ, vừa âm vừa dương, tổng ba góc trong một tam giác không bằng 180°, phương trình bậc n có nhiều hơn n nghiệm, ...

Ta có thể khắc phục điểm yếu này bằng cách thay 0 bằng $A \wedge \overline{A}$, mà ta đã có sẵn A rồi nên chỉ cần thay 0 bằng $\overline{A}$. Như vậy ta có sơ đồ mới:

$$A \to B \Leftrightarrow A \vee \overline{B} \to \overline{A}.$$

Có thể nói, sơ đồ này là kết hợp của cả hai sơ đồ: Chứng minh phản chứng truyền thống và dùng mệnh đề phản đảo.

Ví dụ 7. *Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn*

$$a+b+c>0, \quad ab+bc+ca>0, \quad abc>0.$$

Chứng minh rằng cả ba số a, b, c đều dương.

Chứng minh. Giả sử một trong các số a, b, c là số âm. Vì ta có $abc > 0$ nên phải có 2 số âm, 1 số dương. Không mất tính tổng quát, giả sử a, $b < 0$, $c > 0$. Khi đó

$$ab+bc+ca = a(a+b+c) - a^2 + bc < 0.$$

Mâu thuẫn với điều kiện giả thiết! □

Phản ví dụ là một phương pháp đơn giản và hiệu quả để bác bỏ một giả thuyết hay một khẳng định nào đó. Cơ sở logic của phản ví dụ là tương đương logic sau

$$\overline{\forall x : P(x)} \Leftrightarrow \exists x : \overline{P}(x).$$

Chẳng hạn, Euler đã chỉ ra khẳng định của Fermat là sai khi cho rằng các số dạng $F_n = 2^{2^n} + 1$ đều là số nguyên tố bằng cách chỉ ra rằng

$$F_5 = 2^{32} + 1 = 641 \cdot 6700417.$$

Cũng bằng cách tương tự, ta có thể bác bỏ nhiều các bài toán "tự chế" của các tác giả không chuyên đăng trên các diễn đàn. Tuy nhiên, với các bài toán trong đề thi thì sao? Rõ ràng là chúng không thể sai được (trừ một số ngoại lệ). Vậy phản ví dụ sẽ được dùng như thế nào?

Phản ví dụ có thể giúp chúng ta tránh đi vào những ngõ cụt (tức là lao đầu vào chứng minh một điều không đúng) trên con đường đi của mình. Chẳng hạn với bài toán sau:

Ví dụ 8 (IMO, 2001). *Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1.$$

Chứng minh. Dạng phân thức gợi ý cho chúng ta đến việc áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, cụ thể ta có

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{a^2+8bc}+b\sqrt{b^2+8ca}+c\sqrt{c^2+8ab}}.$$

Tiếp tục áp dụng Cauchy-Schwarz cho tổng thứ hai, ta có

$$a\sqrt{a^2+8bc}+b\sqrt{b^2+8ca}+c\sqrt{c^2+8ab} \leqslant \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2+8ab+8bc+8ca)}.$$

Như vậy, để chứng minh khẳng định đề bài, ta chỉ cần chứng minh

$$\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2+8ab+8bc+8ca)} \leqslant (a+b+c)^2,$$

hay là

$$(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2+8ab+8bc+8ca) \leqslant (a+b+c)^4.$$

Ta đã đưa một bất đẳng thức chứa căn phức tạp về một bất đẳng thức dạng đa thức. Đáng tiếc là bất đẳng thức cuối cùng này không đúng (bạn đọc hãy thử đưa ra phản ví dụ).

Nếu ta sớm tìm ra phản ví dụ hoặc sớm phát hiện ra rằng bất đẳng thức không đúng thì sẽ rất may mắn vì không bị mất thời gian để "chứng minh" nó.

Cách tiếp cận trên có thể điều chỉnh để có một lời giải hoành chỉnh như sau: Ta đánh giá $a\sqrt{a^2+8bc}+b\sqrt{b^2+8ca}+c\sqrt{c^2+8ab}$ bằng cách sử dụng Cauchy-Schwarz khác đi một chút

$$\begin{aligned} a\sqrt{a^2+8bc}+b\sqrt{b^2+8ca}+c\sqrt{c^2+8ab} &= \sqrt{a}\sqrt{a^3+8abc}+\sqrt{b}\sqrt{b^3+8abc}+\sqrt{c}\sqrt{c^3+8abc} \\ &\leqslant \sqrt{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+24abc)}. \end{aligned}$$

Bây giờ ta chỉ cần chứng minh

$$\sqrt{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+24abc)} \leqslant (a+b+c)^2$$

là xong. Nhưng bất đẳng thức cuối cùng này có thể chứng minh dễ dàng bằng cách rút gọn, khai triển và dùng AM-GM. □

Bài toán trên có thể chứng minh bằng phương pháp phản chứng như sau

Cách khác. Đặt $x=\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}$, $y=\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}$, $z=\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$ thì ta có

$$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)=512$$

và ta cần chứng minh

$$x+y+z \geqslant 1.$$

Giả sử ngược lại, $x+y+z<1$. Khi đó

$$\begin{aligned} 512 &= \left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right) \\ &> \left[\frac{(x+y+z)^2}{x^2}-1\right]\left[\frac{(x+y+z)^2}{y^2}-1\right]\left[\frac{(x+y+z)^2}{z^2}-1\right] \\ &= \frac{(2x+y+z)(y+z)(2y+x+z)(x+z)(2z+x+y)(x+y)}{x^2y^2z^2} \geqslant 512. \end{aligned}$$

Mâu thuẫn. (Ở bất đẳng thức cuối cùng ta dùng AM-GM cho các dấu ngoặc $x+y \geqslant 2\sqrt{xy}$, $2x+y+z=x+x+y+z \geqslant 4\sqrt[4]{x\cdot x\cdot y\cdot z}, \ldots$) □

Bên cạnh việc dùng để bác bỏ các mệnh đề hoặc khẳng định sai, phản ví dụ còn là một tư duy rất tự nhiên trên con đường chứng minh tính đúng đắn của một giả thuyết. Khi được yêu cầu chứng minh A, ta có thể bắt đầu bằng việc nghi ngờ A sai, tìm cách xây dựng ra phản ví dụ của A. Trong quá trình tìm phản ví dụ như vậy, có thể ta sẽ thấy việc tìm kiếm của ta là không thể, từ đó tìm ra manh mối để chứng minh A đúng.

Bài tập 6. Cho đẳng thức

$$1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 = 20.$$

Bạn An khẳng định bạn ấy có một cách đặt các dấu $+$ hoặc $-$ vào các dấu $*$ để được một đẳng thức đúng. Bạn Bình phản đối và cho rằng điều đó là không thể. Hỏi bạn nào nói đúng?

Cuối cùng, ta chú ý rằng một số nguyên lý chứng minh cơ bản của Toán học có liên quan đến phép chứng minh phản chứng:

- **Nguyên lý Dirichlet.** *Nhốt $kn + r$ con thỏ $(0 < r < k)$ vào k cái chuồng thì có một chuồng có ít nhất $n + 1$ con thỏ.*

- Cho Ω là tập hợp các trạng thái, T là tập hợp các phép biến đổi trên Ω. Hàm số $f : \Omega \to \mathbb{R}$ được gọi là bất biến trên Ω đối với các phép biến đổi T nếu $f\big(t(\omega)\big) = f(\omega)$ với mọi $t \in T$ và $\omega \in \Omega$. Ta nói trạng thái ω' có thể thu được từ trạng thái ω bằng các phép biến đổi T nếu tồn tại các phép biến đổi $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sao cho

  $$t_n\left(t_{n-1}\left(\ldots\left(t_1(\omega)\right)\ldots\right)\right) = \omega'.$$

  Nguyên lý bất biến. *Nếu f là một bất biến trên Ω đối với các phép biến đổi T và $f(\omega) \neq f(\omega')$ thì ω' không thể thu được từ ω bằng các phép biến đổi T.*

- **Nguyên lý phản ví dụ nhỏ nhất.** *Xét mệnh đề $A(n)$. Nếu tồn tại n sao cho $A(n)$ sai thì sẽ tồn tại n_0 nhỏ nhất sao cho $A(n_0)$ sai.*

3 Phép chứng minh phản chứng và một số định lý kinh điển

Trong phần này, ta sử dụng phương pháp phản chứng để chứng minh một số kết quả kinh điển và tính chất quan trọng trong chương trình toán Olympic.

Định lý 3. *Giả sử x là số hữu tỉ dương sao cho x^2 là một số nguyên dương. Khi đó, ta có x cũng là một số nguyên dương.*

Chứng minh. Giả sử x không phải là một số nguyên dương. Khi đó, ta có thể viết $x = \frac{p}{q}$ với $p, q \in \mathbb{N}^*$, $(p, q) = 1$ và $q > 1$. Theo giả thiết, $x^2 = \frac{p^2}{q^2}$ là một số nguyên dương nên $p^2 \vdots q^2$, suy ra mọi ước nguyên tố của q^2 cũng là ước của p^2.

Như vậy, nếu gọi d là một ước nguyên tố của q (vì $q > 1$ nên d tồn tại) thì ta có $p^2 \vdots d$, tức $p \vdots d$. Từ đây suy ra $(p, q) \geqslant d > 1$. Mâu thuẫn. □

Định lý 4.

(a) *Nếu p là số nguyên tố dạng $4k + 1$ thì tồn tại x sao cho $x^2 + 1$ chia hết cho p;*

(b) *Nếu p là số nguyên tố dạng $4k + 3$ thì không tồn tại x sao cho $x^2 + 1$ chia hết cho p;*

(c) *Nếu p là số nguyên tố dạng $6k + 1$ thì tồn tại x sao cho $x^2 + 3$ chia hết cho p;*

(d) *Nếu p là số nguyên tố dạng $6k + 5$ thì không tồn tại x sao cho $x^2 + 3$ chia hết cho p.*

Chứng minh. (a) Giả sử không tồn tại số nguyên x sao cho x^2+1 chia hết cho p. Với mọi $t \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ tồn tại duy nhất một số nguyên $m(t) \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ sao cho

$$t \cdot m(t) \equiv -1 \pmod p.$$

Rõ ràng nếu $t \neq t'$ thì $m(t) \neq m(t')$. Ngoài ra, do điều giả sử ở trên nên $t \neq m(t)$. Như thế, các số $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ được chia thành $2k$ cặp $(t, m(t))$ có tích bằng -1 theo modulo p. Suy ra

$$1 \cdot 2 \cdots (p-1) \equiv (-1)^{2k} = 1 \pmod p.$$

Nhưng điều này mâu thuẫn với định lý Wilson.

(b) Giả sử tồn tại số nguyên x sao cho x^2+1 chia hết cho p. Khi đó $x^2 \equiv -1 \pmod p$, suy ra

$$x^{4k+2} \equiv -1 \pmod p.$$

Mặt khác, theo định lý nhỏ Fermat thì $x^{4k+2} \equiv 1 \pmod p$. Từ đây suy ra $2 \equiv 0 \pmod p$. Mâu thuẫn vì p là số nguyên tố lẻ.

(c), (d) Xin dành lại cho bạn đọc. (*Gợi ý.* Trước hết hãy chứng minh phương trình đồng dư $x^2+3 \equiv 0 \pmod p$ có nghiệm khi và chỉ khi $x^2+x+1 \equiv 0 \pmod p$ có nghiệm.) □

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh định lý lớn Fermat cho trường hợp $n=4$. Nhưng trước hết, chúng ta cần có kết quả sau (về phương trình Pythagore)

Định lý 5. *Mọi nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2+y^2=z^2$ đều có thể viết dưới dạng*

$$x=(m^2-n^2)k, \quad y=2mnk, \quad z=(m^2+n^2)k,$$

hoặc

$$x=2mnk, \quad y=(m^2-n^2)k, \quad z=(m^2+n^2)k,$$

trong đó các số nguyên m, n, k thỏa mãn các điều kiện:

(1) $(m, n)=1$, $(x, y)=k$;

(2) *Các số m, n khác tính chẵn lẻ;*

(3) $m>n>0$, $k>0$.

Chứng minh. Giả sử $(x, y)=k$, khi đó $x=ka$, $y=kb$ với $(a, b)=1$. Thay vào, ta có

$$(ka)^2+(kb)^2=z^2,$$

hay tương đương

$$a^2+b^2=\left(\frac{z}{k}\right)^2.$$

Đặt $z=kc$, $c \in \mathbb{Q}$, khi đó

$$a^2+b^2=c^2.$$

Do $c \in \mathbb{Q}$ và $c^2 \in \mathbb{N}$ nên theo định lý 3, $c \in \mathbb{N}$. Vì $(a, b)=1$ nên ít nhất một trong hai số a, b phải lẻ. Không mất tính tổng quát, giả sử a lẻ. Nếu b lẻ thì a^2, b^2 khi chia 4 dư 1, dẫn đến c^2 chia 4 dư 2, điều này không thể vì c^2 chia hết cho 2 mà không chia hết cho 4. Vậy b chẵn và như thế $c^2=a^2+b^2$ lẻ. Ta có

$$b^2=(c-a)(c+a),$$

hay

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{c-a}{2} \cdot \frac{c+a}{2}.$$

Dễ dàng kiểm tra rằng $\frac{c-a}{2}$, $\frac{c+a}{2}$ là các số nguyên nguyên tố cùng nhau. Như vậy, ta thấy tồn tại các số nguyên dương m, n sao cho

$$\frac{c-a}{2} = n^2, \quad \frac{c+a}{2} = m^2,$$

từ đó ta có $c = m^2 + n^2$, $a = m^2 - n^2$ và $b = 2mn$, với $(m, n) = 1$. □

Bây giờ ta sẽ chứng minh định lý lớn Fermat cho $n = 4$.

Định lý 6 (Định lý lớn Fermat cho $n = 4$). *Phương trình*

$$x^4 + y^4 = z^2$$

không có nghiệm nguyên với $xyz \neq 0$.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử x^2, y^2, z nguyên tố cùng nhau (do $(x^2)^2 + (y^2)^2 = z^2$). Từ lời giải phương trình Pythagore, ta có tồn tại p, q, $(p, q) = 1$ sao cho

$$x^2 = 2pq, \quad y^2 = p^2 - q^2, \quad z = p^2 + q^2.$$

Từ đây, ta có một bộ số Pythagore khác vì $y^2 + q^2 = p^2$. Như vậy, tồn tại a, b sao cho

$$q = 2ab, \quad y = a^2 - b^2, \quad p = a^2 + b^2.$$

trong đó a, b nguyên tố cùng nhau.

Kết hợp các phương trình, ta có

$$x^2 = 2pq = 2(a^2 + b^2)(2ab) = 4(ab)(a^2 + b^2).$$

Vì a, b và $a^2 + b^2$ đôi một nguyên tố cùng nhau nên a, b, $a^2 + b^2$ đều phải là các số chính phương. Như vậy tồn tại P sao cho

$$P^2 = a^2 + b^2.$$

Nhưng lúc đó ta thu được bước xuống thang vô hạn vì $P^2 = a^2 + b^2 = a'^4 + b'^4$. Bộ nghiệm (a', b', P) rõ ràng nhỏ hơn bộ nghiệm (x, y, z), $p < z$ (lưu ý rằng nếu $xyz = 0$ thì lý luận trên không đúng). Như vậy, sự tồn tại của một số chính phương là tổng của hai số lũy thừa 4 sẽ dẫn đến sự tồn tại của một số chính phương khác nhỏ hơn có cùng tính chất. Điều này không thể xảy ra! □

Định lý 7 (Định lý Bezout). *Nếu a, b là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau thì tồn tại các số nguyên x, y sao cho*

$$ax + by = 1.$$

Chứng minh. Giả sử khẳng định của định lý sai, tức là tồn tại các số nguyên dương a, b sao cho $(a, b) = 1$ và không tồn tại x, y nguyên sao cho $ax + by = 1$. Khi đó tồn tại các số nguyên dương (a_0, b_0) như thế với tổng $a_0 + b_0$ nhỏ nhất.

Nếu $a_0 = b_0$ thì do $(a_0, b_0) = 1$ nên ta phải có $a_0 = b_0 = 1$. Nhưng trong trường hợp này ta có thể chọn $x = 1$, $y = 0$ để có $a_0x + b_0y = 1$, mâu thuẫn. Vậy có thể giả sử $a_0 > b_0$. Do

$(a_0 - b_0, b_0) = (a_0, b_0) = 1$ và $(a_0 - b_0) + b_0 = a_0 < a_0 + b_0$ nên theo định nghĩa của (a_0, b_0) thì phải tồn tại các số nguyên x, y sao cho

$$(a_0 - b_0)x + b_0 y = 1.$$

Nhưng điều này lại tương đương với $a_0 x + b_0(y - x) = 1$, tức là ta tìm được $x' = x$, $y' = y - x$ thỏa mãn $ax' + by' = 1$. Mâu thuẫn. Vậy điều giả sử ban đầu là sai và như thế khẳng định của định lý được chứng minh. □

Định lý 8. *Nếu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm cộng tính nhưng không tuyến tính, thì đồ thị*

$$G(f) = \big(x, f(x)\big)$$

trù mật trong $\mathbb{R}^2$. Có nghĩa là nếu $f(x + y) = f(x) + f(y)$ với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$ và không tồn tại a thuộc $\mathbb{R}$ sao cho $f(x) = ax$ thì $G(f)$ trù mật trong $\mathbb{R}^2$.

Chứng minh. Giả sử f là một hàm cộng tính nhưng không tuyến tính. Ta đặt $c = f(1)$ và chọn số thực α sao cho $f(\alpha) \neq c\alpha$. Ta xét hàm số g mới với

$$g(x) = \frac{f(x) - cx}{f(\alpha) - c\alpha}.$$

Từ tính cộng tính của f suy ra g cũng cộng tính trên $\mathbb{R}$. Hơn nữa $g(1) = 0$. Sử dụng tính cộng tính của g, ta suy ra $g(q) = qg(1)$ với mọi q hữu tỷ, dẫn đến $g(q) = 0$ với mọi q hữu tỷ.

Xét một đĩa $D_r(x, y)$ bất kỳ. Chọn số hữu tỷ q sao cho $|q - y| < \frac{r}{2}$ và số hữu tỷ p sao cho $\big|p - (x - q\alpha)\big| < \frac{r}{2}$. Khi đó ta có

$$(p + q\alpha - x)^2 + (q - y)^2 < \frac{r^2}{4} + \frac{r^2}{4} = \frac{r^2}{2} < r^2.$$

Như vậy điểm $(p + q\alpha, q)$ nằm trong đĩa $D_r(x, y)$. Hơn nữa, theo tính cộng tính của g, ta có

$$g(p + q\alpha) = g(p) + qg(\alpha) = qg(\alpha) = q,$$

suy ra điểm $(p + q\alpha, q)$ nằm trên $G(g)$, đồ thị của g. Điều này chứng tỏ rằng mọi đĩa mở trong $\mathbb{R}^2$ đều chứa một điểm nào đó của g. Và như vậy $G(g)$ là trù mật trong $\mathbb{R}^2$. Ta quay trở lại với f và sẽ sử dụng thông tin này, ta có

$$f(x) = ug(x) + cx,$$

trong đó $u = f(\alpha) - c\alpha$.

Xét đĩa $D_r(a, b)$ bất kỳ trong $\mathbb{R}^2$. Xét đĩa D được cho bởi

$$D = D_s\left(a, \frac{b - c\alpha}{u}\right),$$

với $s = \sqrt{\frac{r^2}{2\beta}}$ và $\beta = \max\{2u^2, 1 + 2c^2\}$.

Vì $G(g)$ trù mật trong $\mathbb{R}^2$, ta tìm được số thực y sao cho $\big(y, g(y)\big)$ thuộc D. Bây giờ xét điểm $\big(y, ug(y) + cy\big)$ thuộc $G(f)$, phép kiểm tra trực tiếp cho thấy điểm này thuộc $D_r(a, b)$. Điều này chứng tỏ rằng $G(f)$ trù mật trong $\mathbb{R}^2$. □

Định lý 9. *Cho f, g, h là các đa thức thuộc $\mathbb{R}[x]$ thoả mãn các điều kiện:*

(*i*) $\deg h = \deg f + \deg g$;

(*ii*) $\deg f > \deg g$ *hoặc* $\deg f = \deg g$ *và* $f^* + g^* \neq 0$, *trong đó* f^*, g^* *tương ứng là các hệ số cao nhất của* f *và* g.

Khi đó với mọi n nguyên dương, tồn tại không quá một đa thức $P(x)$ có bậc n thoả mãn

$$P(h) = P(f)P(g). \tag{1}$$

Chứng minh. Giả sử P là đa thức bậc n thoả mãn phương trình (1), $\deg f = f$, $\deg g = g$, $\deg h = h$, các hệ số cao nhất của P, f, g, h tương ứng là P^*, f^*, g^*, h^*. So sánh hệ số cao nhất hai vế của các đa thức trong phương trình

$$P\big(f(x)\big)P\big(g(x)\big) = P\big(h(x)\big),$$

ta có $P^* \cdot (f^*)^n \cdot P^* \cdot (g^*)^n = P^* \cdot (h^*)^n$, từ đó suy ra

$$P^* = \left(\frac{h^*}{f^*g^*}\right)^n.$$

Như vậy, nếu giả sử ngược lại, tồn tại một đa thức Q bậc n (khác P) cũng thoả mãn phương trình (1) thì $Q^* = P^*$ và ta có

$$Q(x) = P(x) + R(x),$$

với $0 \leqslant r = \deg R < n$ (ta quy ước bậc của đa thức đồng nhất 0 bằng $-\infty$, do đó $\deg R \geqslant 0$ đồng nghĩa R không đồng nhất 0).

Thay vào phương trình (1), ta được

$$\big[P(f) + R(f)\big]\big[P(g) + R(g)\big] = P(h) + R(h),$$

hay

$$P(f)P(g) + P(f)R(g) + R(f)P(g) + R(f)R(g) = P(h) + R(h).$$

Do $P(f)P(g) = P(h)$ nên ta có

$$P(f)R(g) + R(f)P(g) + R(f)R(g) = R(h). \tag{2}$$

Bây giờ ta xét các trường hợp:

- $f > g$. Khi đó bậc của các đa thức ở vế trái (2) lần lượt là $nf + rg$, $rf + ng$, $rf + rg$, và do $nf + rg > rf + ng > rf + rg$ nên vế trái có bậc là $nf + rg$. Trong khi đó vế phải có bậc là $rh = r(f + g) < nf + rg$. Mâu thuẫn.

- $f = g$. Khi đó, hai đa thức đầu tiên ở vế trái của (2) cùng có bậc là $nf + rg = ng + rf$ và có thể xảy ra sự triệt tiêu khi thực hiện phép cộng. Tuy nhiên, xét hệ số cao nhất của hai đa thức này, ta có hệ số của x^{nf+rg} trong đa thức thứ nhất và thứ hai lần lượt bằng $P^* \cdot (f^*)^n \cdot R^* \cdot (g^*)^r$, $R^* \cdot (f^*)^r \cdot P^* \cdot (g^*)^n$. Như thế, hệ số của x^{nf+rg} trong tổng hai đa thức bằng $P^* \cdot R^* \cdot (f^*)^r \cdot (g^*)^r \cdot \big[(f^*)^{n-r} + (g^*)^{n-r}\big] \neq 0$ do $f^* + g^* \neq 0$. Như vậy, bậc của vế trái của (2) vẫn là $nf + rg$, trong khi đó bậc của vế phải là $rh = rf + rg < nf + rg$. Mâu thuẫn.

Định lý được chứng minh hoàn toàn. ∎

Định lý 10 (Tiêu chuẩn Eisenstein). *Cho $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ là một đa thức với hệ số nguyên. Giả sử tồn tại một số nguyên tố p sao cho:*

(i) $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ chia hết cho p;

(ii) a_n không chia hết cho p;

(iii) a_0 không chia hết cho p^2.

Chứng minh rằng đa thức $P(x)$ bất khả quy, tức là không thể phân tích thành tích của hai đa thức không hằng với hệ số nguyên.

Chứng minh. Giả sử ngược lại, $P(x)$ phân tích được thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên, $P(x) = Q(x)S(x)$, với

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$
$$S(x) = c_k x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0.$$

(Ở đây $m, k \geqslant 1$ và $m + k = n$.) Khi đó, theo quy tắc nhân đa thức, ta có

$$a_0 = b_0 c_0,$$
$$a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0,$$
$$a_2 = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n = b_m c_k.$$

Vì a_0 chia hết cho p nhưng không chia hết cho p^2 nên có đúng một trong hai số b_0, c_0 chia hết cho b. Ta giả sử b_0 không chia hết cho p còn c_0 chia hết cho p.

Từ đẳng thức $a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0$ và điều kiện của định lý, ta suy ra $b_0 c_1$ chia hết cho p và do b_0 không chia hết cho p nên c_1 chia hết cho p.

Tiếp theo, từ đẳng thức $a_2 = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0$ ta lại suy ra c_2 chia hết cho p. Cứ tiếp tục như thế, ta suy ra c_k chia hết cho p. Nhưng khi đó $a_n = b_m c_k$ chia hết cho p, mâu thuẫn với điều kiện (ii). Vậy điều giả sử ban đầu là sai, tức là $P(x)$ bất khả quy. □

Bài tập 7.

1. Chứng minh rằng $\sqrt{2}$ và $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ là các số vô tỷ.

2. Chứng minh rằng các phương trình sau đây không có nghiệm nguyên dương:

   (a) $4xy - x - y = z^2$;

   (b) $x^2 - y^3 = 7$.

3. Chứng minh định lý sau: Cho f, g, h là các đa thức không hằng thỏa mãn điều kiện $\deg f + \deg g = \deg h$, Q là một đa thức cho trước. Khi đó, với mỗi số nguyên dương n và số thực a, tồn tại nhiều nhất một đa thức P thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

   (i) $\deg P = n$;

   (ii) $P^* = a$ (P^* là hệ số cao nhất của P);

   (iii) $P(f)P(g) = P(h) + Q$.

4. (Tiêu chuẩn Eisentein mở rộng) Cho $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ là một đa thức với hệ số nguyên. Giả sử tồn tại một số nguyên tố p và số nguyên dương k sao cho:

   (i) $a_0, a_1, \ldots, a_{n-k}$ chia hết cho p;

   (ii) a_n không chia hết cho p;

   (iii) a_0 không chia hết cho p^2.

   Khi đó, nếu $P(x) = Q(x)S(x)$ với $Q(x)$, $S(x)$ là các đa thức với hệ số nguyên thì

$$\min\{\deg Q, \deg S\} < k.$$

4 Một số bài tập bổ sung

Trong phần này, ta đưa ra một số bài toán có thể giải khá hiệu quả bằng phản chứng.

Bài tập 8. Cho 13 số thực. Biết rằng tổng của 7 số bất kỳ đều lớn hơn tổng của 6 số còn lại. Chứng minh rằng tất cả các số trên đều dương.

Bài tập 9 (Liên Xô, 1991)**.** Các đường cao AD, BE, CF của tam giác nhọn ABC đồng quy tại điểm H. Biết rằng diện tích các tứ giác $AEHF$ và $HECD$ bằng nhau. Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

Bài tập 10. Chứng minh rằng nếu tam giác có hai đường phân giác trong bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân.

Bài tập 11. Khẳng định sau đây có đúng không: Nếu $a^n - a$ chia hết cho n với mọi số nguyên a thì n là số nguyên tố?

Bài tập 12. Khẳng định sau đây có đúng không: Nếu tổng và tích hai số thực là số nguyên thì chúng cũng là các số nguyên? Cùng câu hỏi với hai số hữu tỷ.

Bài tập 13. Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên lẻ $n > 1$ sao cho $3^n + 1 \,\vdots\, n$.

Bài tập 14. Chứng minh rằng phương trình $x^2 + y^2 = 3$ không có nghiệm hữu tỷ.

Bài tập 15. Chứng minh rằng từ 8 số nguyên dương tùy ý không lớn hơn 20, luôn chọn được ba số x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Bài tập 16. Chứng minh rằng $\log_2 3$ là số vô tỷ.

Bài tập 17. Chứng minh rằng không tồn tại hàm số $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ thoả mãn các điều kiện:

(a) $f(2) = 3$;

(b) $f(mn) = f(m)f(n)$ với mọi m, n thuộc $\mathbb{N}^*$;

(c) $f(m) < f(n)$ với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m < n$.

Bài tập 18 (Việt Nam, 2003)**.** Tồn tại không các số nguyên x, y, u, v, t sao cho

$$x^2 + y^2 = (x+1)^2 + u^2 = (x+2)^2 + v^2 = (x+3)^2 + t^2?$$

Bài tập 19 (IMO, 1983)**.** Các điểm trên chu vi tam giác đều ABC được tô bằng một trong 2 màu xanh và đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác vuông có các đỉnh được tô cùng màu.

Bài tập 20 (IMO, 1983). Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \geqslant 2$, đa thức

$$P(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$$

không thể phân tích thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên có bậc không nhỏ hơn 1.

Bài tập 21. Chứng minh rằng không tồn tại một song ánh giữa tập hợp các số thực thuộc (0, 1) và tập hợp các số nguyên dương.

Bài tập 22 (Việt Nam, 2011). Cho số nguyên dương $n \geqslant 3$. Xét các số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thỏa mãn điều kiện:

(i) $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$;

(ii) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$;

(iii) $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = n(n-1)$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $S = x_1 + x_2$.

Bài tập 23 (Mỹ, 1999). Cho $n > 3$ số thực có tổng không nhỏ hơn n và tổng bình phương không nhỏ hơn n^2. Chứng minh rằng số lớn nhất trong chúng không nhỏ hơn 2.

Bài tập 24 (Mỹ, 2001). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c \geqslant abc$. Chứng minh rằng ít nhất hai trong ba bất đẳng thức sau là bất đẳng thức đúng

$$\frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{6}{c} \geqslant 6, \quad \frac{2}{b} + \frac{3}{c} + \frac{6}{a} \geqslant 6, \quad \frac{2}{c} + \frac{3}{a} + \frac{6}{b} \geqslant 6.$$

Tài liệu tham khảo

[1] Đoàn Quỳnh, Doãn Minh Cường, Trần Nam Dũng, Đặng Hùng Thắng, *Tài liệu giáo khoa chuyên Toán*, Đại số 10, Nhà xuất bản Giáo dục, 2009.

[2] Trần Nam Dũng, *Các phương pháp và kỹ thuật chứng minh*, Hội thảo khoa học các chuyên đề chuyên Toán, Ba Vì, 5/2010.

[3] A. Kovaldzi, A. Kanel-Belov, *Giải bài toán không mẫu mực như thế nào*, Nhà xuất bản MCCME, 2006.

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP QUỐC GIA NĂM 2011

1 Ngày thứ nhất 11/01/2011

Bài 1. *Cho số nguyên dương n. Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, ta có bất đẳng thức*

$$\frac{x^n(x^{n+1}+1)}{x^n+1} \leqslant \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n+1}.$$

Hỏi đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Xét số thực dương x tùy ý. Ta sẽ chứng minh

$$\frac{x^n(x^{n+1}+1)}{x^n+1} \leqslant \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n+1} \tag{1}$$

bằng phương pháp quy nạp theo n.

Với $n = 1$, ta cần chứng minh

$$\frac{x(x^2+1)}{x+1} \leqslant \left(\frac{x+1}{2}\right)^{3}.$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$(x+1)^4 \geqslant 8x(x^2+1),$$

hiển nhiên đúng vì $(x+1)^4 - 8x(x^2+1) = (x-1)^4 \geqslant 0$. Ngoài ra, từ đây ta cũng dễ thấy khi $n = 1$, (1) có đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Giả sử đã có (1) đúng khi $n = k$ và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$. Khi đó, ta có

$$\frac{x^k(x^{k+1}+1)}{x^k+1} \leqslant \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2k+1},$$

từ đó suy ra

$$\frac{x^k(x^{k+1}+1)}{x^k+1}\cdot\frac{(x+1)^2}{4} \leqslant \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2k+3} \text{ và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } x = 1. \tag{2}$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{x^{k+1}(x^{k+2}+1)}{x^{k+1}+1} \leqslant \frac{x^k(x^{k+1}+1)}{x^k+1}\cdot\frac{(x+1)^2}{4}, \tag{3}$$

với đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$. Thật vậy, bất đẳng thức này tương đương với

$$(x^{k+1}+1)^2(x+1)^2 - 4x(x^k+1)(x^{k+2}+1) \geqslant 0,$$
$$(x^{k+1}-1)^2(x-1)^2 \geqslant 0 \text{ (hiển nhiên đúng).}$$

Từ đó suy ra (3) là bất đẳng thức đúng, và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$. Kết hợp điều này với (2), ta được

$$\frac{x^{k+1}(x^{k+2}+1)}{x^{k+1}+1} \leqslant \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2k+3} \text{ và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } x = 1.$$

Điều đó chứng tỏ khi $n = k+1$, (1) là bất đẳng thức đúng và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$. Vậy, với n là số nguyên dương tùy ý, (1) là bất đẳng thức đúng với mọi số thực dương x và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$. □

Bài 2. *Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi $x_1 = 1$ và*

$$x_n = \frac{2n}{(n-1)^2}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}), \quad \forall n \geqslant 2.$$

Với mỗi số nguyên dương n, đặt $y_{n+1} = x_{n+1} - x_n$. Chứng minh rằng dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$.

Lời giải. Với mọi $n \geqslant 1$, ta có

$$x_{n+1} = \frac{2(n+1)}{n^2}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{2(n+1)}{n^2}\left[\frac{(n-1)^2}{2n}+1\right]x_n = \frac{(n+1)(n^2+1)}{n^3}x_n,$$

suy ra

$$\frac{x_{n+1}}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\cdot\frac{x_n}{n}, \quad \forall n \geqslant 1.$$

Do đó với mọi $n \geqslant 2$, thì

$$y_{n+1} = x_{n+1} - x_n = \left[\frac{(n+1)(n^2+1)}{n^3} - 1\right]x_n = \frac{n^2+n+1}{n^2}\cdot\frac{x_n}{n}$$
$$= \left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k^2}\right). \quad (1)$$

Từ đó, với lưu ý $y_1 = x_2 - x_1 = 3$, ta có $y_n > 0$, $\forall n \geqslant 1$, $y_1 < y_2$ và với mọi $n \geqslant 3$, thì

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{n^2+n+1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)^2}{(n-1)^2+n}\cdot\left[1+\frac{2}{(n-1)^2}\right] = 1 + \frac{2}{n^4-n^3+n^2} > 1.$$

Suy ra (y_n) là dãy số tăng. (2)

Vì với mọi $n \geqslant 2$, ta có $n+1 < n^2$ và

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \leqslant \left(1+\frac{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}}{n-1}\right)^{n-1},$$

nên từ (1) ta được

$$y_n < 2\left(1+\frac{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}}{n-1}\right)^{n-1}, \quad \forall n \geqslant 2. \quad (3)$$

Mặt khác, lại có

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) = 2 - \frac{1}{n-1} < 2, \quad \forall n \geqslant 3,$$

nên từ (3) suy ra

$$y_n < 2\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n-1} < 2e^2, \quad \forall n \geqslant 2.$$

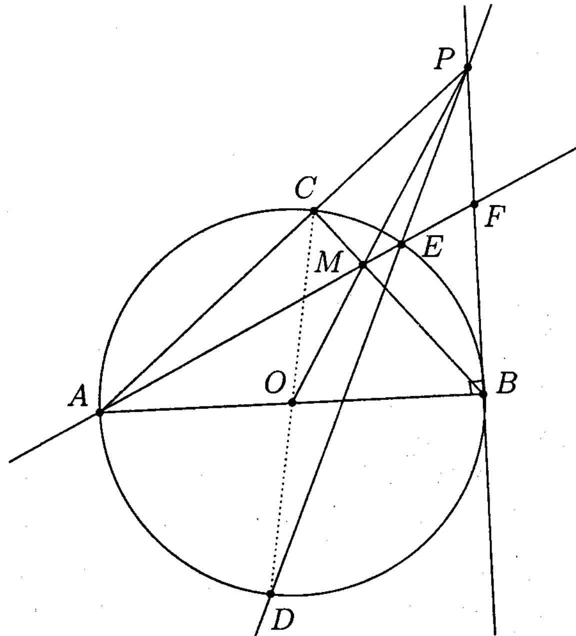
Do đó (y_n) bị chặn trên. Kết hợp với (2) suy ra dãy (y_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$. □

Bài 3. *Trong mặt phẳng, cho đường tròn (O) đường kính AB. Xét một điểm P di động trên tiếp tuyến tại B của (O) sao cho P không trùng với B. Đường thẳng PA cắt (O) tại điểm thứ hai C. Gọi D là điểm đối xứng với C qua O. Đường thẳng PD cắt (O) tại điểm thứ hai E.*

(a) *Chứng minh rằng các đường thẳng AE, BC và PO cùng đi qua một điểm, gọi là M.*

(b) *Hãy xác định vị trí của điểm P sao cho tam giác AMB có diện tích lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó theo bán kính của đường tròn (O).*

Lời giải.



(a) Gọi F là giao điểm của hai đường thẳng AE và BP. Ta có

$$\angle ACE = 90° + \angle BCE = 90° + \angle FAB = \angle EFP.$$

Suy ra $\angle EFP + \angle ECP = 180°$. Do đó $CEFP$ là tứ giác nội tiếp, dẫn đến

$$\angle CFP = \angle CEP = 90°.$$

Và vì thế $CF \parallel AB$. Với kết quả này, ta được

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{FP}}{\overline{FB}}.$$

Từ đó, xét tam giác ABP, ta có

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{CA}} \cdot \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} \cdot \frac{\overline{FB}}{\overline{FP}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = -1.$$

Suy ra, theo định lý Ceva, ba đường thẳng PO, AE và BC đồng quy.

(b) Đặt $BP = x$ và ký hiệu R là bán kính của (O). Ta có

$$PA = \sqrt{x^2+4R^2}, \quad PC = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4R^2}}, \quad AC = \frac{4R^2}{\sqrt{x^2+4R^2}}, \quad BC = \frac{2Rx}{\sqrt{x^2+4R^2}}. \quad (3)$$

Dễ thấy $\triangle PMC \sim \triangle PNA$ nên $\frac{MC}{NA} = \frac{PC}{PA}$. Mà $NA = BM$ (do NA và MB đối xứng với nhau qua O) nên ta có $\frac{MC}{BM} = \frac{PC}{PA}$, suy ra

$$\frac{BC}{BM} = \frac{PC+PA}{PA}. \quad (4)$$

Từ (3) và (4), ta được

$$BM = \frac{PA \cdot BC}{PC+PA} = \frac{Rx\sqrt{x^2+4R^2}}{x^2+2R^2}.$$

Vì vậy

$$S_{AMB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BM \cdot \sin\angle ABM = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \frac{Rx\sqrt{x^2+4R^2}}{x^2+2R^2} \cdot \frac{AC}{2R} = \frac{2R^3x}{x^2+2R^2}.$$

Từ đây, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$S_{AMB} \leqslant \frac{2R^3x}{2\sqrt{2}xR} = \frac{R^2}{\sqrt{2}},$$

với đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \sqrt{2}R$. Vậy, tam giác AMB có diện tích lớn nhất khi và chỉ khi P nằm cách B một khoảng bằng $\sqrt{2}R$ (có hai vị trí như vậy); khi đó $S_{AMB} = \frac{R^2}{\sqrt{2}}$. □

Bài 4. *Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ có độ dài mỗi cạnh và độ dài các đường chéo AC, AD không vượt quá $\sqrt{3}$. Lấy 2011 điểm phân biệt tùy ý nằm trong ngũ giác đó. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn đơn vị có tâm nằm trên cạnh của ngũ giác đã cho chứa ít nhất 403 điểm trong số các điểm đã lấy.*

Lời giải. Để chứng minh khẳng định của bài toán, ta sẽ chứng minh có thể phủ ngũ giác $ABCDE$ bởi 5 hình tròn đơn vị có tâm nằm trên cạnh của ngũ giác đó. Ta có nhận xét sau:

Nhận xét. *Có thể phủ tam giác XYZ có độ dài các cạnh không vượt quá $\sqrt{3}$ bởi 3 hình tròn đơn vị có tâm nằm tại các đỉnh của tam giác đó.*

Chứng minh. Giả sử ngược lại, tồn tại điểm M thuộc tam giác XYZ mà M không thuộc bất cứ hình tròn nào trong các hình tròn đơn vị có tâm nằm tại các đỉnh của tam giác đó. Khi đó, ta có $MX > 1$, $MY > 1$ và $MZ > 1$. Dễ thấy, trong ba góc $\angle XMY$, $\angle YMZ$ và $\angle ZMX$ phải có ít nhất một góc có số đo lớn hơn hay bằng $120°$. Không mất tổng quát, giả sử $\angle XMY \geqslant 120°$. Áp dụng định lý cosin cho tam giác XMY với chú ý rằng $\cos\angle XMY \leqslant -\frac{1}{2}$, ta được

$$XY^2 = MX^2 + MY^2 - 2 \cdot MX \cdot MY \cdot \cos\angle XMY > 1 + 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

Suy ra $XY > \sqrt{3}$, trái với giả thiết. Mâu thuẫn nhận được cho ta điều muốn chứng minh. ■

Do các tam giác ABC, ACD và ADE có độ dài các cạnh không vượt quá $\sqrt{3}$ nên theo nhận xét trên, chúng lần lượt được phủ bởi các bộ ba hình tròn đơn vị $\big((A), (B), (C)\big)$, $\big((A), (C), (D)\big)$ và $\big((A), (D), (E)\big)$. Do đó, ngũ giác $ABCDE$ được phủ bởi 5 hình tròn đơn vị có tâm nằm tại các đỉnh của ngũ giác đó. Theo nguyên lý Dirichlet, trong 5 hình tròn đó phải tồn tại hình tròn chứa ít nhất 403 điểm trong số các điểm đã lấy. □

2 Ngày thứ hai 12/01/2011

Bài 5. *Cho dãy số nguyên (a_n) xác định bởi $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ và $a_n = 6a_{n-1} + 5a_{n-2}$ với mọi $n \geqslant 2$. Chứng minh rằng $a_{2012} - 2010$ chia hết cho 2011.*

Lời giải. (a) *Cách 1.* Xét dãy số nguyên (b_n) xác định bởi $b_0 = 1$, $b_1 = -1$ và

$$b_n = 6b_{n-1} + 2016b_{n-2}, \quad \forall n \geqslant 2.$$

Dễ thấy với mọi $n \geqslant 0$, ta có

$$a_n \equiv b_n \pmod{2011}. \tag{1}$$

Phương trình đặc trưng của dãy (b_n) là $x^2 - 6x - 2016 = 0$ có hai nghiệm 48 và -42. Suy ra, số hạng tổng quát của dãy (b_n) có dạng

$$b_n = C_1 \cdot (-42)^n + C_2 \cdot 48^n.$$

Từ các điều kiện ban đầu của dãy (b_n), ta có $C_1 + C_2 = 1$ và $42C_1 - 48C_2 = 1$. Từ đó suy ra $C_1 = \frac{49}{90}$ và $C_2 = \frac{41}{90}$, và như vậy

$$b_n = \frac{49 \cdot (-42)^n + 41 \cdot 48^n}{90}, \quad \forall n \geqslant 0.$$

Vì 2011 là số nguyên tố nên theo định lý Fermat nhỏ, ta có

$$(-42)^{2010} \equiv 48^{2010} \equiv 1 \pmod{2011}.$$

Do đó

$$90b_{2012} \equiv 49 \cdot (-42)^{2012} + 41 \cdot 48^{2012} \equiv 49 \cdot (-42)^2 + 41 \cdot 48^2 \equiv 90b_2 \pmod{2011}.$$

Mà $(90, 2011) = 1$ nên từ đây, ta suy ra

$$b_{2012} \equiv b_2 \pmod{2011}.$$

Mặt khác, vì $b_2 = 6b_1 + 2016b_0 = 2010$ nên $b_{2012} \equiv 2010 \pmod{2011}$. Kết hợp với (1), ta được $a_{2012} \equiv 2010 \pmod{2011}$. Đây chính là kết quả cần chứng minh. □

(b) *Cách 2.* Dễ dàng chứng minh được số hạng tổng quát của dãy (a_n) là

$$a_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{14}}\right)\left(3 + \sqrt{14}\right)^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{14}}\right)\left(3 - \sqrt{14}\right)^n. \tag{2}$$

Đặt $p = 2011$, ta có

$$a_{p+1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{14}}\right)\left(3 + \sqrt{14}\right)^{p+1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{14}}\right)\left(3 - \sqrt{14}\right)^{p+1}.$$

Do $\left(3 + \sqrt{14}\right)^{p+1} = A_{p+1} + B_{p+1}\sqrt{14}$ và $\left(3 - \sqrt{14}\right)^{p+1} = A_{p+1} - B_{p+1}\sqrt{14}$, trong đó

$$A_{p+1} = \sum_{i=0}^{\frac{p+1}{2}} C_{p+1}^{2i} \cdot 3^{2i} \cdot 14^{\frac{p+1}{2} - i} \tag{3}$$

và

$$B_{p+1} = \sum_{i=1}^{\frac{p+1}{2}} C_{p+1}^{2i-1} \cdot 3^{2i-1} \cdot 14^{\frac{p+1}{2}-i}, \tag{4}$$

nên ta có

$$a_{p+1} = A_{p+1} - 4B_{p+1}. \tag{5}$$

Do p là số nguyên tố nên $C_{p+1}^k = 0 \pmod p$, $\forall 2 \leqslant k \leqslant p-1$. Vì vậy, từ (3) và (4), ta được

$$A_{p+1} \equiv 14^{\frac{p+1}{2}} + 3^{p+1} \pmod p$$

và

$$B_{p+1} \equiv 3(p+1)\left(14^{\frac{p-1}{2}} + 3^{p-1}\right) \equiv 3\left(14^{\frac{p-1}{2}} + 3^{p-1}\right) \pmod p.$$

Từ đây, kết hợp với (5), ta có

$$a_{p+1} \equiv -3^p + 2 \cdot 14^{\frac{p-1}{2}} \pmod p. \tag{6}$$

Để ý rằng $45^2 \equiv 14 \pmod p$ và $(45, p) = 1$, theo định lý Fermat nhỏ ta có $3^p \equiv 3 \pmod p$ và

$$14^{\frac{p-1}{2}} \equiv 45^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Do đó, từ (6) ta được

$$a_{2012} = a_{p+1} \equiv -3 + 2 = -1 \equiv 2010 \pmod{2011}.$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Chú ý. Đối với bài làm của thí sinh theo cách 2, yêu cầu:

- Trình bày chi tiết các bước tìm số hạng tổng quát a_n;
- Chứng minh kết quả: "Với p là số nguyên tố, $C_{p+1}^k \equiv 0 \pmod p$, $\forall 2 \leqslant k \leqslant p-1$".

Bài 6. *Cho tam giác ABC không cân tại A và có các góc $\angle ABC$, $\angle ACB$ là các góc nhọn. Xét một điểm D di động trên cạnh BC sao cho D không trùng với B, C và hình chiếu vuông góc của A trên BC. Đường thẳng d vuông góc với BC tại D cắt các đường thẳng AB và AC tương ứng tại E và F. Gọi M, N và P lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AEF, BDE và CDF. Chứng minh rằng bốn điểm A, M, N, P cùng nằm trên một đường tròn khi và chỉ khi đường thẳng d đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.*

Lời giải. Do $\angle ABC$ và $\angle ACB$ là các góc nhọn nên E nằm trên tia đối của tia AB hoặc nằm trong cạnh AB, đồng thời F nằm trong cạnh AC hoặc nằm trên tia đối của tia AC. Vì thế, từ định nghĩa các điểm M, N, P suy ra E, M, N thẳng hàng và M, F, P thẳng hàng. Do đó

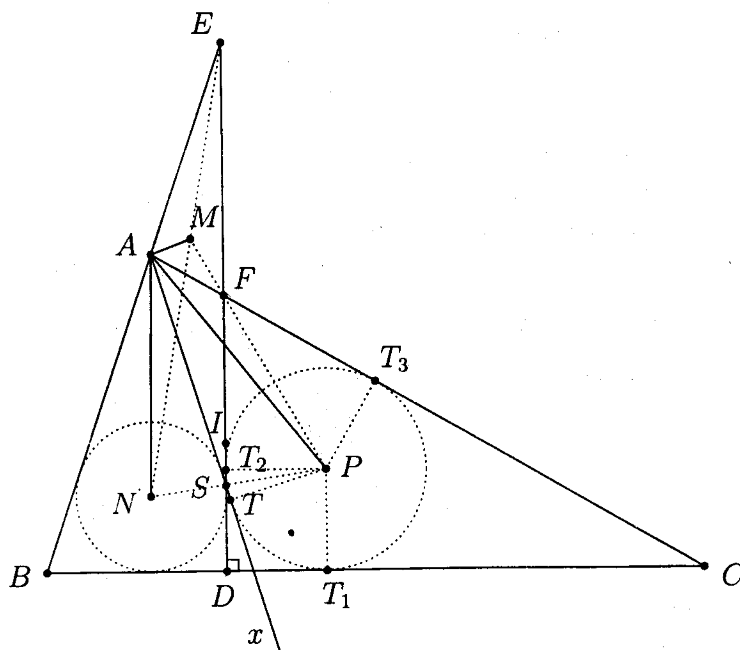
$$\angle NMP = \frac{1}{2}(\angle AEF + \angle AFE) = \frac{1}{2}\angle BAC.$$

Suy ra A, M, N, P cùng nằm trên một đường tròn khi và chỉ khi

$$\angle NAP = \frac{1}{2}\angle BAC. \tag{1}$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh $\angle NAP = \frac{1}{2}\angle BAC$ khi và chỉ khi d đi qua tâm I của đường tròn nội tiếp tam giác ABC. (2)

Không mất tổng quát, giả sử $AB < AC$. (3)



(a) *Điều kiện cần.* Giả sử $I \in d$. Khi đó, từ (3) suy ra E nằm trên tia đối của tia AB và F nằm trong cạnh AC. Qua A, kẻ đường thẳng Ax (khác AC) tiếp xúc với (P). Ta sẽ chứng minh Ax tiếp xúc với (N). Thật vậy, gọi T, T_1, T_2, T_3 lần lượt là tiếp điểm của (P) và Ax, CD, DF, FC. Gọi S là giao điểm của Ax và DF. Ta có $AT = AT_3$, $CT_3 = CT_1$, $DT_1 = DT_2$ và $ST_2 = ST$. Do đó

$$AS - SD = (AT - ST) - (DT_2 - ST_2) = AT_3 - DT_1 = AC - CD. \qquad (4)$$

Vì $I \in d$ nên D là tiếp điểm của (I) và cạnh BC, suy ra

$$AC - CD = AB - BD. \qquad (5)$$

Từ (4) và (5), ta có $AS + BD = AB + SD$. Vì thế $ABDS$ là tứ giác ngoại tiếp. Suy ra Ax tiếp xúc với (N). Từ đó, ta có

$$\angle NAP = \angle NAx + \angle xAP = \frac{1}{2}\angle BAx + \frac{1}{2}\angle xAC = \frac{1}{2}\angle BAC.$$

(b) *Điều kiện đủ.* Giả sử $\angle NAP = \frac{1}{2}\angle BAC$. Xét hai trường hợp sau:

- *Trường hợp 1. E nằm trên tia đối của tia AB và F nằm trong cạnh AC.* Qua A, kẻ tiếp tuyến Ax (khác AC) của (P) cắt DF tại S. Ta có

$$\angle NAx = \angle NAP - \angle xAP = \frac{1}{2}\angle BAC - \frac{1}{2}\angle xAC = \frac{1}{2}\angle BAx,$$

suy ra Ax tiếp xúc với (N), dẫn đến $ABDS$ là tứ giác ngoại tiếp. Và như thế, ta được

$$AS + BD = AB + SD.$$

Hơn nữa, theo chứng minh ở phần trên, ta có $AS - SD = AC - CD$ (xem lại (4)). Từ đó, ta được $BD = AB + CD - AC$, suy ra

$$2BD = AB + BC - AC.$$

Do đó $BD = p - b$, trong đó $p = \frac{AB+BC+CA}{2}$ và $b = AC$. Suy ra $BD = BK$, trong đó K là tiếp điểm của (I) và cạnh BC. Từ đó, do D và K cùng nằm trong cạnh BC, suy ra $D \equiv K$. Vì vậy $I \in d$.

- *Trường hợp 2. E nằm trong cạnh AB và F nằm trên tia đối của tia AC.* Do (3) nên
$$CD > CK. \tag{6}$$
Mặt khác, dễ thấy, trong trường hợp này B đóng vai trò của C và C đóng vai trò của B, E đóng vai trò của F và F đóng vai trò của E, (N) đóng vai trò của (P) và (P) đóng vai trò của (N) trong trường hợp trước. Vì thế, theo chứng minh trên, ta phải có $CD = CK$, mâu thuẫn với (6). Mâu thuẫn nhận được cho thấy trường hợp này không thể xảy ra.

Vậy, (2) được chứng minh. Từ (1) và (2) hiển nhiên ta có điều phải chứng minh. □

Bài 7. *Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng đa thức $P(x, y) = x^n + xy + y^n$ không thể viết được dưới dạng*
$$P(x, y) = G(x, y)H(x, y),$$
trong đó $G(x, y)$ và $H(x, y)$ là các đa thức với hệ số thực, khác đa thức hằng.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh khẳng định của bài ra bằng phương pháp phản chứng. Giả sử tồn tại các đa thức với hệ số thực $G(x, y)$ và $H(x, y)$, khác đa thức hằng, sao cho
$$P(x, y) = G(x, y)H(x, y), \tag{1}$$
trong đó $P(x, y) = x^n + xy + y^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Viết $G(x, y)$ và $H(x, y)$ dưới dạng các đa thức của x:
$$G(x, y) = g_m(y)x^m + g_{m-1}(y)x^{m-1} + \cdots + g_1(y)x + g_0(y), \quad m \in \mathbb{N},$$
$$H(x, y) = h_k(y)x^k + h_{k-1}(y)x^{k-1} + \cdots + h_1(y)x + h_0(y), \quad k \in \mathbb{N},$$
trong đó $g_i(y)$, $i = \overline{0, m}$, và $h_j(y)$, $j = \overline{0, k}$, là các đa thức với hệ số thực của y.

Từ (1) suy ra:

- $m + k = n;$ (2)
- Với $n \geqslant 2$, $g_m(y)$, $h_k(y)$ là các đa thức hằng và do đó chúng không là bội của y. (3)

Từ (3), do $G(x, y)$ và $H(x, y)$ khác đa thức hằng nên nếu $n \geqslant 2$ thì
$$m \geqslant 1, \quad k \geqslant 1. \tag{4}$$

- *Xét $n = 1$.* Khi đó, theo (2), ta có $m + k = 1$. Suy ra $m = 0$ và $k = 1$, hoặc $m = 1$ và $k = 0$. Giả sử $m = 0$ và $k = 1$ (trường hợp $m = 1$ và $k = 0$ xét tương tự). Khi đó, ta có
$$(y+1)x + y = g_0(y)h_1(y)x + g_0(y)h_0(y).$$
Suy ra $g_0(y)\left[h_1(y) - h_0(y)\right] = 1$. Vì thế, $g_0(y)$ là đa thức hằng, mâu thuẫn với giả thiết $G(x, y)$ khác đa thức hằng.
- *Xét $n \geqslant 2$.* Gọi i_0 và j_0 là các chỉ số bé nhất sao cho $g_{i_0}(y)$ và $h_{j_0}(y)$ là các đa thức không là bội của y. Dễ thấy, hệ số của $x^{i_0+j_0}$ trong khai triển của $G(x, y)H(x, y)$ là
$$g_0(y)h_{i_0+j_0}(y)+g_1(y)h_{i_0+j_0-1}(y)+\cdots+g_{i_0}(y)h_{j_0}(y)+g_{i_0+1}(y)h_{j_0-1}(y)+\cdots+g_{i_0+j_0}(y)h_0(y)$$
Từ định nghĩa của i_0 và j_0 suy ra hệ số trên không chia hết cho y. Vì thế, từ (1), với lưu ý rằng P chỉ có duy nhất hệ số của x^n không chia hết cho y, suy ra $i_0+j_0 = n$. Do đó $i_0 = n$

và $j_0 = k$. Kết hợp với (4) suy ra phải có $m = 1$ hoặc $k = 1$, vì nếu trái lại, m, $k > 1$, thì từ việc cân bằng hệ số của x ở hai vế của (1) ta sẽ có $y = g_0(y)h_1(y) + g_1(y)h_0(y) \vdots y^2$, là điều vô lý.

Giả sử $m = 1$ (trường hợp $k = 1$ xét tương tự). Khi đó, ta có

$$x^n + xy + y^n = \big[ax + g_0(y)\big]\big[bx^{n-1} + h_{n-2}(y)x^{n-2} + \cdots + h_1(y)x + h_0(y)\big], \quad (5)$$

trong đó a, b là các hằng số thực, với $ab = 1$.

Từ (5) ta được $y_n = g_0(y)h_0(y)$. Suy ra $g_0(y) = a'y^s$, trong đó $s \in \mathbb{N}^*$, $s \leqslant n$ và a' là một hằng số thực khác 0. Đặt $c = -\frac{a'}{a}$, ta có $c \neq 0$. Thế $x = cy^s$ vào (5), ta được

$$c^n y^{sn} + cy^{s+1} + y^n \equiv 0. \quad (6)$$

- Nếu $s = 1$ và $n = 2$ thì từ (6) ta được $(c^2 + c + 1)y^2 \equiv 0$. Suy ra $c^2 + c + 1 = 0$, là điều vô lý.
- Nếu $s = 1$ và $n > 2$ thì từ (6) ta được $(c^n + 1)y^n + cy^2 \equiv 0$, là điều vô lý (vì $c \neq 0$).
- Nếu $s \geqslant 2$ và $n \geqslant 2$ thì $sn > n$ và $sn > s + 1$. Do đó (6) là điều vô lý, vì $c \neq 0$.

Vậy, tóm lại, điều giả sử ban đầu là sai và vì thế ta có điều đề bài yêu cầu chứng minh. □

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN VIỆT NAM DỰ THI TOÁN QUỐC TẾ NĂM 2011

1 Ngày thứ nhất 09/04/2011

Bài 1. *Tại điểm* $(1, 1)$ *của mặt phẳng tọa độ* Oxy, *có một con cào cào. Từ điểm đó, con cào cào chỉ nhảy đến các điểm nguyên dương khác theo quy tắc: từ điểm nguyên dương* A, *con cào cào nhảy đến điểm nguyên dương* B *nếu tam giác* AOB *có diện tích bằng* $\frac{1}{2}$.

(*a*) *Tìm tất cả các điểm nguyên dương* (m, n) *mà con cào cào có thể nhảy đến sau một số hữu hạn bước nhảy, xuất phát từ điểm* $(1, 1)$.

(*b*) *Giả sử* (m, n) *là một điểm nguyên dương có tính chất đã nêu ở câu (a). Chứng minh rằng tồn tại một cách nhảy của con cào cào từ điểm* $(1, 1)$ *đến điểm* (m, n) *mà số bước nhảy không vượt quá* $|m-n|$.

(Điểm (x, y) *được gọi là điểm nguyên dương nếu* x *và* y *là các số nguyên dương).*

Lời giải. Với hai điểm nguyên dương $A(m, n)$ và $B(p, q)$ thuộc mặt phẳng tọa độ Oxy, ta có $S_{AOB} = \frac{1}{2}$ khi và chỉ khi

$$|mq - np| = 1. \qquad (1)$$

(a) Từ (1), dựa vào định lý Bezout, dễ dàng suy ra, xuất phát từ điểm $(1, 1)$ con cào cào chỉ có thể nhảy tới các điểm nguyên dương (m, n) mà $(m, n) = 1$.

Ngược lại, xét điểm nguyên dương (m, n) tùy ý mà $(m, n) = 1$. Vì $(m, n) = 1$ nên dựa vào định lý Bezout, dễ thấy tồn tại các số nguyên dương m_1 và n_1 sao cho $(m_1, n_1) = 1$, $m_1 \leqslant m$, $n_1 \leqslant n$, $m_1 + n_1 < m + n$ và $|mn_1 - nm_1| = 1$. Như thế, từ điểm (m, n), con cào cào có thể nhảy đến điểm nguyên dương (m_1, n_1) (theo (1)) mà $(m_1, n_1) = 1$, $m_1 \leqslant m$, $n_1 \leqslant n$ và

$$m_1 + n_1 < m + n.$$

Sử dụng nhận xét vừa nêu trên, bằng quy nạp dễ dàng chứng minh được con cào cào có thể nhảy đến điểm $(1, 1)$, xuất phát từ một điểm nguyên dương (m, n) tùy ý mà $(m,n) = 1$. Từ đó, do bước nhảy của con cào cào có tính thuận-nghịch, suy ra xuất phát từ điểm $(1, 1)$, con cào cào có thể nhảy đến một điểm nguyên dương (m, n) tùy ý mà $(m, n) = 1$. Vậy, tập hợp các điểm nguyên dương cần tìm là

$$\{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{N}^*, (m, n) = 1\}.$$

(b) Xét điểm nguyên dương (m, n) mà $(m, n) = 1$ và $|m - n| = 1$. Khi đó, theo (1), con cào cào có thể nhảy từ điểm $(1, 1)$ đến điểm (m, n) chỉ sau một bước nhảy.

Xét điểm nguyên dương (m, n) mà $(m, n) = 1$ và $|m - n| > 1$. Không mất tổng quát, giả sử $m < n$. Khi đó, sẽ tồn tại $m_1, n_1 \in \mathbb{N}^*$ sao cho $(m_1, n_1) = 1$, $m_1 < n_1$, $m_1 \leqslant m$, $n_1 < n$ và

$$nm_1 - mn_1 = 1. \qquad (2)$$

Viết lại (2) dưới dạng $n_1(n-m) - n(n_1 - m_1) = 1$. Từ đó, vì $n_1 < n$ nên $n_1 - m_1 < n - m$. Như vậy, từ điểm (m, n), con cào cào có thể nhảy đến điểm nguyên dương (m_1, n_1) mà $|m_1 - n_1| \leqslant |m-n| - 1$. Từ đó suy ra, tồn tại một cách nhảy của con cào cào từ điểm (m, n) đến điểm $(1, 1)$ với số bước nhảy không vượt quá $|m-n|$. □

Chú ý. Đối với bài làm của thí sinh theo cách trên, yêu cầu trình bày:

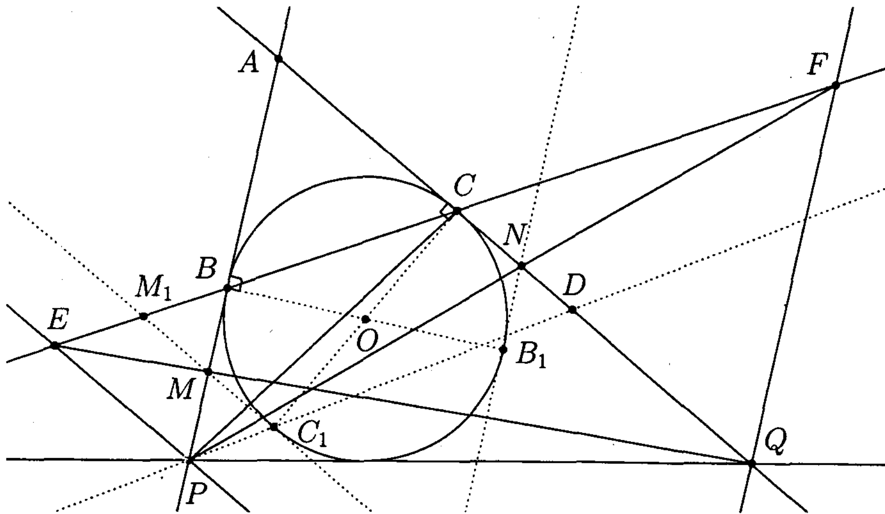
- Phép chứng minh sự tồn tại của các số m_1, n_1;
- Phép chứng minh quy nạp đã nói tới trong lời giải trên.

Bài 2. *Trong mặt phẳng, cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn đó. Qua A, kẻ các tiếp tuyến tới (O); gọi B và C là các tiếp điểm. Xét một điểm P di động trên tia đối của tia BA và một điểm Q di động trên tia đối của tia CA sao cho đường thẳng PQ tiếp xúc với (O). Đường thẳng BC cắt đường thẳng đi qua P, song song với AC tại E và cắt đường thẳng đi qua Q, song song với AB tại F. Chứng minh rằng*

(a) *Đường thẳng EQ luôn đi qua một điểm cố định, gọi là M; đường thẳng FP luôn đi qua một điểm cố định, gọi là N.*

(b) *Tích $PM \cdot QN$ không đổi.*

Lời giải.



(a) Gọi B_1 và C_1 tương ứng là điểm xuyên tâm đối của B và C. Tiếp tuyến tại C_1 của (O) cắt các đường thẳng AP và BC lần lượt tại M và M_1. Hiển nhiên M và M_1 là các điểm cố định. Ta sẽ chứng minh đường thẳng EQ luôn đi qua điểm cố định M.

Gọi D là giao điểm của các đường thẳng PC_1 và AC. Ta có kết quả quen biết: $AD = CQ$. Từ định nghĩa các điểm A, B và C ta có $AB = AC$. Suy ra

$$\angle ABC = \angle ACB. \tag{1}$$

Lại có $MM_1 \parallel AC$ (do cùng vuông góc với CC_1). Do đó

$$\angle ACB = \angle MM_1B. \tag{2}$$

Từ (1) và (2), ta được

$$\angle MM_1B = \angle ABC.$$

Mà $\angle ABC = \angle MBM_1$ nên $\angle MM_1B = \angle MBM_1$. Suy ra

$$MM_1 = MB = MC_1. \tag{3}$$

Từ đó, với lưu ý $EP \parallel AC \parallel MM_1$ và gọi Q_1 là giao điểm của EM và AC, ta có

$$\frac{MM_1}{CQ} = \frac{MC_1}{AD} = \frac{PM}{PA} = \frac{EM}{EQ_1} = \frac{MM_1}{CQ_1}.$$

Suy ra $CQ = CQ_1$. Mà Q và Q_1 cùng nằm trên tia đối của tia CA nên $Q_1 \equiv Q$. Điều này cho thấy đường thẳng EQ đi qua điểm cố định M.

Hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được đường thẳng FP đi qua điểm cố định N, là giao điểm của đường thẳng AC và tiếp tuyến tại B_1 của (O).

(b) Dễ thấy, các đường thẳng MB và MC_1 tương ứng đối xứng với các đường thẳng NB_1 và NC qua O. Do đó, M và N đối xứng với nhau qua O. Suy ra

$$BM = B_1N = NC. \tag{4}$$

Từ (3), (4) và giả thiết $EP \parallel AQ$, ta được

$$\frac{PM}{PA} = \frac{EM}{EQ} = \frac{MM_1}{CQ} = \frac{BM}{CQ} = \frac{CN}{CQ}.$$

Suy ra $PM \cdot CQ = CN \cdot PA$, hay

$$PM(CN + NQ) = CN(AM + MP).$$

Từ đây ta có $PM \cdot NQ = CN \cdot AM$. Mà $CN \cdot AM = \text{const}$ nên $PM \cdot NQ = \text{const}$. □

Chú ý.

- Đối với bài làm của thí sinh theo cách trên, yêu cầu trình bày phép chứng minh $AD = CQ$.
- Một trong các chứng minh ngắn gọn của kết quả trên là cách chứng minh dựa vào phép vị tự tâm P, tỉ số $k = \frac{PM}{PA}$.
- Các kết quả của bài toán vẫn đúng khi P và Q tương ứng di động trên các đường thẳng AB và AC sao cho PQ là một tiếp tuyến của (O).

Bài 3. *Cho số nguyên $n \geqslant 3$. Xét n số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:*

(*i*) $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$;

(*ii*) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$;

(*iii*) $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = n(n-1)$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tổng $S = x_1 + x_2$.

Lời giải. **(a)** *Tìm* $\max S$. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} S^2 &= (x_3 + x_4 + \cdots + x_n)^2 \leqslant (n-2)(x_3^2 + x_4^2 + \cdots + x_n^2) \\ &= (n-2)\left[n(n-1) - (x_1^2 + x_2^2)\right] \leqslant (n-2)\left[n(n-1) - \frac{S^2}{2}\right], \end{aligned}$$

từ đó suy ra

$$S \leqslant \sqrt{2(n-1)(n-2)}.$$

Mặt khác, dễ thấy đẳng thức xảy ra khi

$$x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{2(n-1)(n-2)}}{2}, \quad x_3 = x_4 = \cdots = x_n = -\frac{\sqrt{2(n-1)(n-2)}}{n-2}.$$

Vì vậy, $\max S = \sqrt{2(n-1)(n-2)}$.

(b) *Tìm* $\min S$. Ta xét hai trường hợp:

- *Trường hợp* $n = 3$. Lúc này, ta có các nhận xét sau:

Nhận xét 1. *Nếu x_1, x_2, x_3 là các số thực thỏa mãn điều kiện đề bài thì $x_1 \geqslant 1$.*

Chứng minh. Do x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện đề bài nên ta có

$$\begin{cases} x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \\ x_2 + x_3 = -x_1 \\ x_2x_3 = x_1^2 - 3 \end{cases}$$

Suy ra phương trình bậc hai (ẩn t):

$$f(t) = t^2 + x_1t + x_1^2 - 3 = 0$$

có hai nghiệm thuộc khoảng $(-\infty, x_1]$. Do đó, ta có

$$\begin{cases} \Delta = 3(4 - x_1^2) \geqslant 0 \\ f(x_1) = 3x_1^2 - 3 \geqslant 0 \\ x_1 \geqslant -\dfrac{x_1}{2} \end{cases}$$

Giải hệ này, ta được $2 \geqslant x_1 \geqslant 1$. Và như thế, nhận xét được chứng minh. ■

Nhận xét 2. *Nếu các số x_1, x_2, x_3 thỏa mãn các điều kiện đề bài thì các số $S = x_1 + x_2$, $S_1 = x_1 + x_3$, và $S_2 = x_2 + x_3$ cũng thỏa mãn các điều kiện đó.*

Chứng minh. Từ điều kiện $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3$ dễ dàng suy ra $S \geqslant S_1 \geqslant S_2$. Tiếp theo, ta có

$$S + S_1 + S_2 = 2(x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

và

$$\begin{aligned} S^2 + S_1^2 + S_2^2 &= 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + (x_1 + x_2 + x_3)^2 = 6. \end{aligned}$$

Do đó, nhận xét được chứng minh. ■

Từ các nhận xét nêu trên, với x_1, x_2, x_3 là các số thực thỏa mãn các điều kiện đề bài, hiển nhiên ta có $S \geqslant 1$. Hơn nữa, dễ thấy $S = 1$ khi $x_1 = 2$ và $x_2 = x_3 = -1$. Vậy, trong trường hợp này $\min S = 1$.

- *Trường hợp* $n = 4$. Trong trường hợp này, ta sẽ chứng minh $\min S = 2$.

Trước hết, bằng phương pháp phản chứng, ta sẽ chứng minh $S \geqslant 2$. Thật vậy, giả sử ngược lại $S < 2$. Xét hai khả năng sau:

- *Nếu* $x_2 \geqslant 0$, gọi k là chỉ số lớn nhất sao cho $x_k \geqslant 0$, $2 \leqslant k < n$. Ta có $2 > x_1$ và $1 > x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_k \geqslant 0 > x_{k+1} \geqslant \cdots \geqslant x_n$. Suy ra

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = (x_1 + x_2) + x_3 + \cdots + x_k < 2 + (k-2) = k.$$

Do đó

$$\begin{aligned} n(n-1) &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2 \\ &< x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 + (x_{k+1} + \cdots + x_n)^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 + (x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^2 \\ &< (x_1 + x_2)^2 + x_3^2 + \cdots + x_k^2 + k^2 \\ &< 4 + (k-2) + k^2 = k^2 + k + 2. \end{aligned}$$

Từ đây, kết hợp với $n(n-1) \geqslant k(k+1)$ và $n(n-1)$ là số chẵn, ta được $k = n-1$.

Do $S = x_1 + x_2 < 2$ nên $x_1x_2 < 1$, suy ra $x_ix_j < 1$, $\forall i, j : 1 \leqslant i < j \leqslant k = n-1$. Do đó

$$\begin{aligned} n(n-1) &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})^2 \\ &= 2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_1x_2 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}) \\ &= 2\left[(x_1 + x_2)(x_1 + x_3) + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_1x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}\right] \\ &< 2\left[(x_1 + x_2)^2 + (n-2) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} - 3\right] \\ &< 2\left[4 + n + \frac{(n-1)(n-2)}{2} - 5\right] = n(n-1), \end{aligned}$$

là điều vô lý.

- *Xét khả năng thứ hai* $x_2 < 0$. Do $x_1 + (n-1)x_2 \geqslant x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ nên ta có $x_2 \geqslant -\frac{x_1}{n-1}$, từ đó suy ra $2 > x_1 + x_2 \geqslant \frac{n-2}{n-1}x_1$, hay

$$x_1 < \frac{2(n-1)}{n-2}.$$

Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned} n(n-1) &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^2 \\ &\leqslant x_1^2 + (x_2 + x_3 + \cdots + x_n)^2 \\ &= 2x_1^2 < \frac{8(n-1)^2}{(n-2)^2}. \end{aligned}$$

Và như vậy, ta có

$$n^3 - 4n^2 - 4n + 8 < 0. \qquad (1)$$

Vì $n^3 - 4n^2 - 4n + 8 = (n-5)(n^2 + n + 1) + 13$ nên với mọi $n \geqslant 5$, (1) là điều vô lý. Xét $n = 4$. Đặt $y_4 = -x_1$, $y_3 = -x_2$, $y_2 = -x_3$ và $y_1 = -x_4$, ta có

$$y_1 \geqslant y_2 \geqslant y_3 > 0 > y_4, \quad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0, \quad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 12 = 4 \cdot 3$$

và

$$y_1 + y_2 = -(y_3 + y_4) = x_1 + x_2 < 2.$$

Như thế, các số y_1, y_2, y_3, y_4 thỏa mãn đầy đủ các điều kiện như các số x_1, x_2, x_3, x_4 ở khả năng 1 ứng với $n = 4$ đã xét ở trên. Do đó, trong trường hợp này ta cũng sẽ nhận được điều vô lý.

Tất cả những điều vô lý nhận được ở trên cho thấy điều giả sử ban đầu là sai và vì thế ta có $S \geqslant 2$. Nhận thấy $S = 2$ chẳng hạn khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 1$ và $x_n = 1 - n$ nên ta có kết luận cho trường hợp này là $\min S = 2$.

Vậy, tóm lại, $\min S = 1$ nếu $n = 3$ và $\min S = 2$ nếu $n \geqslant 4$. □

Chú ý. Trong trường hợp $n \geqslant 4$, còn có thể chứng minh $S \geqslant 2$ bằng cách sử dụng định lý Rolle và phương pháp quy nạp theo n.

2 Ngày thứ hai 10/04/2011

Bài 4. *Cho dãy số nguyên dương (a_n) xác định bởi $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ và $a_{n+2} = 1 + \left\lfloor \frac{a_{n+1}^2}{a_n} \right\rfloor$ với mọi $n \geqslant 0$ ($\lfloor x \rfloor$ ký hiệu phần nguyên của số thực x). Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n,*

$$a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = 2^n.$$

Lời giải. Trước hết, bằng phương pháp quy nạp theo n, ta chứng minh các số hạng của dãy số đã cho thỏa mãn hệ thức truy hồi

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 2a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Thật vậy, bằng cách tính toán trực tiếp, dễ thấy (1) đúng với $n = 0, 1, 2$. Giả sử (1) đúng đến $n = k$, $k \geqslant 2$, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng khi $n = k + 1$. Theo giả thiết quy nạp, ta có

$$\begin{aligned} a_{k+3} &= 1 + \left\lfloor \frac{a_{k+2}^2}{a_{k+1}} \right\rfloor = 1 + \left\lfloor \frac{(4a_{k+1} - 2a_k)^2}{a_{k+1}} \right\rfloor = 1 + 16a_{k+1} - 16a_k + \left\lfloor \frac{4a_k^2}{a_{k+1}} \right\rfloor \\ &= 4(4a_{k+1} - 2a_k) - 2(4a_k - 2a_{k-1}) + 1 + \left\lfloor \frac{4a_k^2}{a_{k+1}} \right\rfloor - 4a_{k-1} \\ &= 4a_{k+2} - 2a_{k+1} + 1 + \left\lfloor \frac{4a_k^2}{a_{k+1}} \right\rfloor - 4a_{k-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Ta sẽ chứng minh

$$\left\lfloor \frac{4a_k^2}{a_{k+1}} \right\rfloor = 4a_{k-1} - 1. \tag{3}$$

Đẳng thức này tương đương với $\frac{4a_k^2}{a_{k+1}} - 1 < 4a_{k-1} - 1 \leqslant \frac{4a_k^2}{a_{k+1}}$, hay

$$a_k^2 < a_{k-1}a_{k+1} \leqslant a_k^2 + \frac{1}{4}a_{k+1}. \tag{4}$$

Vì thế, để chứng minh (3), ta sẽ chứng minh (4). Vì $a_{k+1} = 1 + \left\lfloor \frac{a_k^2}{a_{k-1}} \right\rfloor$ nên suy ra

$$\frac{a_k^2}{a_{k-1}} < a_{k+1} \leqslant 1 + \frac{a_k^2}{a_{k-1}}.$$

Do đó

$$a_k^2 < a_{k-1}a_{k+1} \leqslant a_{k-1} + a_k^2. \tag{5}$$

Lại theo giả thiết quy nạp, ta có

$$a_{k+1} = 4a_k - 2a_{k-1} = 4(4a_{k-1} - 2a_{k-2}) - 2a_{k-1} = 6a_{k-1} + 8(a_{k-1} - a_{k-2}) > 4a_{k-1},$$

suy ra

$$a_{k-1} < \frac{1}{4}a_{k+1}. \qquad (6)$$

Từ (5) và (6) ta được (4) và vì thế (3) được chứng minh. Từ (3) và (2), ta được

$$a_{k+3} = 4a_{k+2} - 2a_{k+1}.$$

Điều đó chứng tỏ (1) đúng khi $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Từ (1), với lưu ý $a_0 = 1$ và $a_1 = 3$, ta được

$$a_n = \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

trong đó $\alpha = 2 - \sqrt{2}$ và $\beta = 2 + \sqrt{2}$ là hai nghiệm của phương trình đặc trưng.

Do đó, với lưu ý $\alpha + \beta = 4$ và $\alpha\beta = 2$, ta có

$$\begin{aligned} a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 &= \frac{\alpha^{n+3} + \beta^{n+3}}{4} \cdot \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{4} - \left(\frac{\alpha^{n+2} + \beta^{n+2}}{4}\right)^2 \\ &= \frac{2^{n+1}(\alpha^2 + \beta^2) - 2 \cdot 2^{n+2}}{16} = 2^n. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Chú ý. Có thể phát hiện ra hệ thức truy hồi (1) nhờ phép suy luận ngược.

Bài 5. *Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho*

$$2^{n+2}(2^n - 1) - 8 \cdot 3^n + 1$$

là một số chính phương.

Lời giải. Giả sử n là số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu của đề bài. Khi đó, tồn tại số tự nhiên t sao cho

$$2^{n+2}(2^n - 1) - 8 \cdot 3^n + 1 = t^2. \qquad (1)$$

Đẳng thức này có thể viết lại dưới dạng $(2^{n+1} - 1)^2 - 8 \cdot 3^n = t^2$, hay

$$\frac{(2^{n+1} - 1) - t}{2} \cdot \frac{(2^{n+1} - 1) + t}{2} = 2 \cdot 3^n.$$

Đặt $a = \frac{(2^{n+1}-1)-t}{2}$ và $b = \frac{(2^{n+1}-1)+t}{2}$, ta có

$$a + b = 2^{n+1} - 1 \qquad (2)$$

và

$$ab = 2 \cdot 3^n. \qquad (3)$$

Từ (1) dễ thấy t là số lẻ. Do đó a, b là các số nguyên dương. Vì thế, từ (3) suy ra $a = 3^u$ và $b = 2 \cdot 3^v$ hoặc ngược lại. Trong cả hai trường hợp, bằng cách thế vào (2), ta đều thu được phương trình dạng

$$3^u + 2 \cdot 3^v = 2^{n+1} - 1, \qquad (4)$$

trong đó $u + v = n$.

Bằng cách thử trực tiếp với $n = 1, 2, 3, 4$, ta thấy (4) chỉ có nghiệm (u, v) khi $n = 3$ (khi đó, $u = 2$ và $v = 1$). Xét $n \geqslant 5$. Từ (4) ta có $3^u < 2^{n+1}$, suy ra $9^u < 8^{\frac{2(n+1)}{3}}$ và như thế, ta được

$$u < \frac{2(n+1)}{3}.$$

Mà $u = n - v$ nên ta có $n - v < \frac{2(n+1)}{3}$, suy ra

$$v > \frac{n-2}{3} \geqslant 1.$$

Bằng cách tương tự, ta cũng có $u > \frac{n-2}{3} \geqslant 1$. Như vậy,

$$w = \min\{u, v\} > \frac{n-2}{3} \geqslant 1.$$

Từ đây suy ra $2^{n+1} - 1 \equiv 0 \pmod 9$, dẫn đến $n + 1 \equiv 0 \pmod 6$. Đặt $n + 1 = 6k$. Thế vào (4), ta được phương trình

$$3^u + 2 \cdot 3^v = (2^k - 1)(2^k + 1)(4^{2k} + 4^k + 1).$$

Do $4^{2k} + 4^k + 1$ chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên 3^{w-1} là ước của $(2^k - 1)(2^k + 1)$, suy ra $3^{w-1} \leqslant 2^k + 1 \leqslant 3^k$. Với kết quả này, ta được

$$\frac{n-2}{3} - 1 < w - 1 \leqslant \frac{n+1}{6};$$

suy ra $n < 11$. Từ đây, do $n \geqslant 5$ và $n + 1 \equiv 0 \pmod 6$, ta được $n = 5$. Thử lại, với $n = 3$ và $n = 5$ ta được các số chính phương 9 và 45^2, tương ứng. Vậy, có tất cả hai số nguyên dương n thỏa mãn yêu cầu đề bài là $n = 3$ và $n = 5$. □

Bài 6. *Cho n là một số nguyên lớn hơn 1. Có n học sinh ngồi quanh một chiếc bàn tròn, mỗi em có một số chiếc kẹo (có thể có em không có chiếc kẹo nào) và tổng số kẹo của tất cả các em là một bội của n. Các em thực hiện việc chuyển kẹo cho nhau như sau: Với số kẹo mỗi em có lúc đầu, nếu có ít nhất một em có nhiều kẹo hơn bạn ngồi ngay bên phải mình thì một em (tùy ý) trong số những em như thế chuyển 1 chiếc kẹo của mình cho bạn ngồi ngay bên phải. Với số kẹo mỗi em có sau lần chuyển thứ nhất, nếu có ít nhất một em có nhiều kẹo hơn bạn ngồi ngay bên phải mình thì một em (tùy ý) trong số những em như thế lại chuyển 1 chiếc kẹo của mình cho bạn ngồi ngay bên phải. Quá trình chuyển kẹo cứ như thế được tiếp tục. Chứng minh rằng sau một số hữu hạn lần chuyển kẹo như vậy, tất cả các em đều có số kẹo như nhau.*

Lời giải. Xuất phát từ một học sinh nào đó, lần lượt theo chiều ngược chiều kim đồng hồ, ta đánh số các em bởi $1, 2, \ldots, n$. Khi đó, với mỗi $i = \overline{1, n}$, ngồi ngay bên phải em i là em $i + 1$ (quy ước em $n + 1$ là em 1). Với $t \in \mathbb{N}^*$, ta định nghĩa thời điểm t là thời điểm nằm giữa lần chuyển kẹo thứ t và thứ $t + 1$. Với mỗi $i = \overline{1, n}$, ký hiệu x_i là số kẹo của em i tại mỗi thời điểm và để chỉ rõ số kẹo của em i tại thời điểm t, ta dùng ký hiệu $x_i(t)$. Ta gọi mỗi bộ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là một trạng thái. Xét đại lượng

$$F = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

Xét một thời điểm t tùy ý. Giả sử, ở lần chuyển kẹo thứ $t + 1$, người thực hiện việc chuyển kẹo là em i. Khi đó, ta có

$$x_i(t) > x_{i+1}(t), \ \ x_j(t+1) = x_j(t), \forall j \notin \{i, i+1\}, \ \ x_i(t+1) = x_i(t) - 1, \ \ x_{i+1}(t+1) = x_{i+1}(t) + 1.$$

Từ đây, ký hiệu $F(t)$ là giá trị của F tại thời điểm t, ta được

$$F(t+1)-F(t) = \left[x_i(t)-1\right]^2 + \left[x_{i+1}(t)+1\right]^2 - \left[x_i(t)\right]^2 - \left[x_{i+1}(t)\right]^2$$
$$= 2\left[x_{i+1}(t)+1-x_i(t)\right] \leqslant 0.$$

Ngoài ra $F(t+1)-F(t)=0$ khi và chỉ khi

$$x_i(t) = x_{i+1}(t)+1. \tag{1}$$

Như vậy, giá trị của F không tăng trong quá trình chuyển kẹo và F nhận cùng một giá trị ở hai thời điểm liên tiếp, t và $t+1$, khi và chỉ khi ở lần chuyển kẹo thứ $t+1$, em chuyển kẹo có nhiều hơn em nhận kẹo đúng 1 chiếc kẹo. Hơn nữa, do mỗi trạng thái cho ta một nghiệm tự nhiên của phương trình

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n,$$

nên số trạng thái đôi một khác nhau là hữu hạn. Suy ra, trong quá trình chuyển kẹo, F chỉ nhận một số hữu hạn các giá trị đôi một khác nhau.

Xảy ra một trong hai trường hợp sau:

- *Trường hợp 1. F nhận mỗi giá trị chỉ tại một số hữu hạn thời điểm liên tiếp.* Trong trường hợp này, sau một số hữu hạn lần chuyển kẹo, F sẽ nhận giá trị nhỏ nhất có thể và kể từ thời điểm (đầu tiên) F nhận giá trị nhỏ nhất đó, việc chuyển kẹo chỉ có thể thực hiện thêm một số hữu hạn lần. Khi việc chuyển kẹo không thể thực hiện được, ta phải có $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant x_1$. Và vì thế, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Khẳng định của bài toán được chứng minh.

- *Trường hợp 2. Tồn tại một giá trị mà F nhận giá trị đó tại vô hạn thời điểm liên tiếp.* Giả sử $F(t) = F(t+1)$, $\forall t \geqslant t_0$. Khi đó, theo (1), kể từ thời điểm t_0, mỗi lần chuyển kẹo chỉ được thực hiện bởi em i mà tại thời điểm đó

  $$x_i - x_{i+1} = 1. \tag{2}$$

  Do kể từ thời điểm t_0 ta sẽ nhận được vô số trạng thái mà chỉ có hữu hạn trạng thái đôi một khác nhau (chứng minh trên) nên phải tồn tại ít nhất một trạng thái xuất hiện tối thiểu hai lần. Xét một trạng thái trong số các trạng thái như vậy, gọi là A. Giả sử A xuất hiện tại thời điểm $t_1 \geqslant t_0$; gọi k là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho tại thời điểm $t_1 + k$, A lại tái xuất hiện.

  Gọi (C) là quá trình chuyển kẹo kể từ thời điểm t_1 đến thời điểm $t_1 + k$. Do (C) khởi đầu và kết thúc bởi cùng một trạng thái nên trong quá trình đó nếu em i đã nhận kẹo ở một lần chuyển kẹo nào đó thì sau đó i phải thực hiện việc chuyển kẹo cho bạn ngồi ngay bên phải mình. Từ đó, do các em ngồi quanh bàn tròn, suy ra trong (C), mỗi em đều phải thực hiện việc chuyển kẹo ít nhất một lần. (3)

  Hơn nữa, do tổng số kẹo của các em là một bội của n nên với $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là một trạng thái tùy ý, ta phải có hoặc $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, hoặc tồn tại $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho $|x_i - x_j| \geqslant 2$. Từ đây suy ra, mỗi trạng thái trong (C) đều có tính chất: tồn tại $i \neq j \in \{1, 2, \ldots n\}$ sao cho

  $$|x_i - x_j| \geqslant 2.$$

  Gọi m là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho trong (C) có ít nhất một trạng thái mà ở trạng thái đó tồn tại $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho

  $$|x_i - x_{i+m}| \geqslant 2.$$

Gọi B là trạng thái có tính chất như vậy và ở gần A nhất (có thể $B = A$). Giả sử B xuất hiện (trong (C)) tại thời điểm $t_2 \geqslant t_1$. Xét hai khả năng sau:

- *Khả năng 1.* $m = 1$. Lúc này, ta có hai trường hợp xảy ra như sau:
  - *Trường hợp 1.1.* $B = A$. Khi đó, ở lần đầu tiên (trong (C)) chuyển kẹo cho $i + 1$, em i sẽ có nhiều hơn $i + 1$ ít nhất 2 chiếc kẹo; mâu thuẫn với (2).
  - *Trường hợp 1.2.* $B \neq A$. Khi đó, ở trạng thái A, ta có $|x_i - x_{i+1}| \leqslant 1$. Do đó, để trở lại được trạng thái A, sau thời điểm t_2, i phải chuyển kẹo cho $i + 1$ ít nhất 1 lần và ở lần đầu tiên trong các lần như vậy i sẽ có nhiều hơn $i + 1$ ít nhất 2 chiếc kẹo; mâu thuẫn với (2).
- *Khả năng 2.* $m > 1$. Từ định nghĩa của m suy ra số kẹo của các em i, $i + 1, \ldots,$ $i + m - 1$, $i + m$ (trong trạng thái B) phải thỏa mãn

$$x_i = x_{i+1} + 1, \quad x_{i+1} = x_{i+2} = \cdots = x_{i+m-1} = x_{i+m} + 1. \tag{4}$$

  Lúc này, ta cũng có hai trường hợp như sau:
  - *Trường hợp 2.1.* $B = A$. Trong trường hợp này, tại lần đầu tiên có một trong các em $i - 1$, i, $i + 1, \ldots, i + m$ thực hiện việc chuyển kẹo, em chuyển kẹo chỉ có thể hoặc là $i - 1$, hoặc i, hoặc $i + m - 1$, hoặc $i + m$.
    - ⋆ Nếu $i - 1$ thực hiện việc chuyển kẹo thì sau bước chuyển đó, ta sẽ có trạng thái mà trong đó $x_i - x_{i+1} = 2$;
    - ⋆ Nếu i thực hiện việc chuyển kẹo thì sau bước chuyển đó, ta sẽ có trạng thái mà trong đó $x_{i+1} - x_{i+m} = 2$;
    - ⋆ Nếu $i + m - 1$ thực hiện việc chuyển kẹo thì sau bước chuyển đó, ta sẽ có trạng thái mà trong đó $x_i - x_{i+m-1} = 2$;
    - ⋆ Nếu $i + m$ thực hiện việc chuyển kẹo thì sau bước chuyển đó, ta sẽ có trạng thái mà trong đó $x_{i+m-1} - x_{i+m} = 2$.

    Trong cả 4 tình huống nói trên, ta đều nhận được điều mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của m.
  - *Trường hợp 2.2.* $B \neq A$. Khi đó, ở trạng thái A, các số x_i, $x_{i+1}, \ldots, x_{i+m-1}$, x_{i+m} sẽ không thỏa mãn quan hệ (4). Vì thế, để trở lại trạng thái A, sau thời điểm t_2 phải có thời điểm mà ít nhất một trong các số đó thay đổi. Điều này chỉ có được khi có ít nhất một trong các em $i - 1$, i, $i + 1, \ldots, i + m$ thực hiện việc chuyển kẹo. Lập luận hoàn toàn tương tự như trường hợp 2.1, ta sẽ nhận được những điều mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của m.

Tóm lại, các mâu thuẫn nhận được ở trên cho thấy trường hợp 2 không thể xảy ra.

Bài toán được chứng minh xong. □

Chú ý. Bài toán còn có thể giải được nhờ các đại lượng nửa bất biến như: Số kẹo max của các học sinh tại mỗi thời điểm, hiệu số kẹo max và số kẹo min của các học sinh, ...